Des Sturmiens aux dendriques

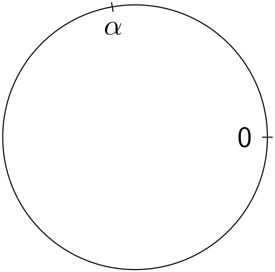
France Gheeraert

Juin 2025

LAMFA

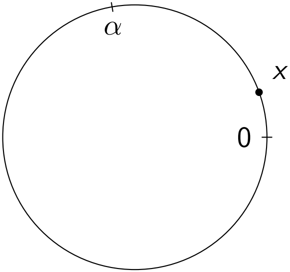
Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :



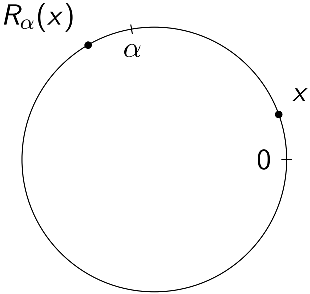
Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :



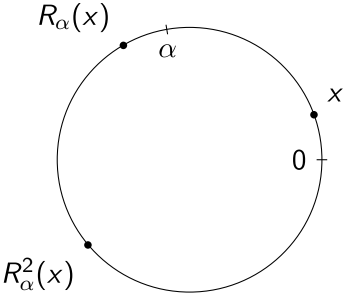
Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :



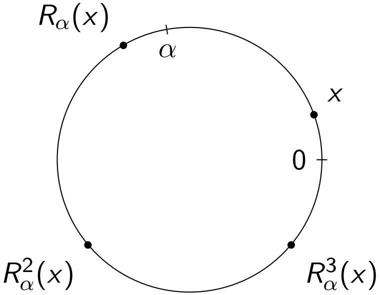
Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :



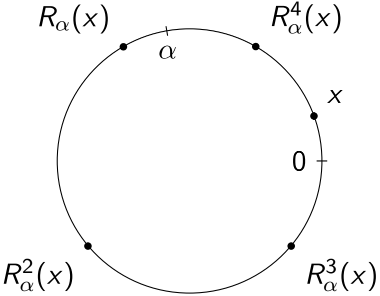
Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :



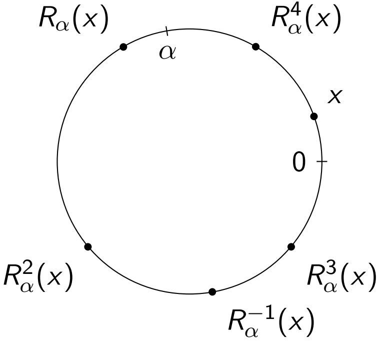
Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :



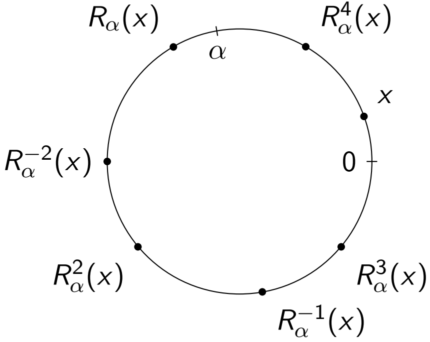
Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :



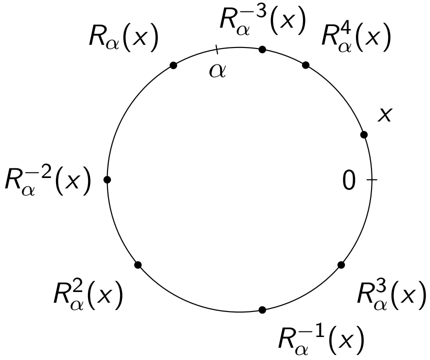
Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :



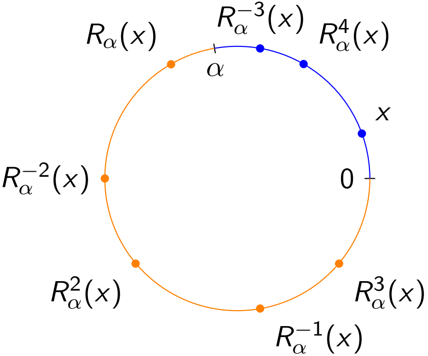
Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :



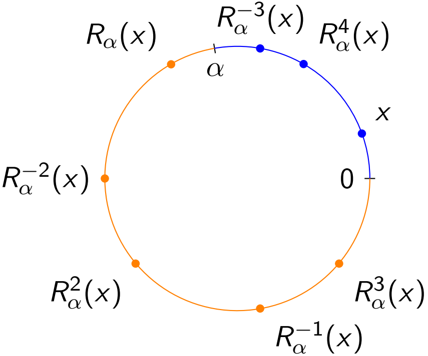
Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :



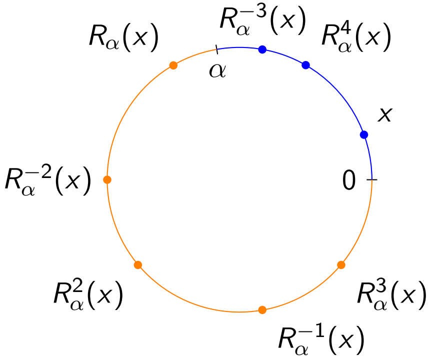
Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :



Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :

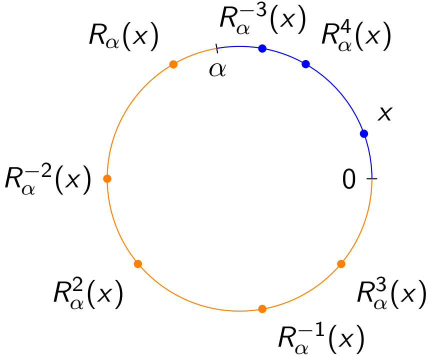


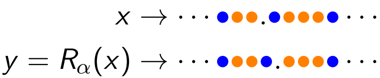
$x \to \cdots$ ●●●.●●●●● $\cdots$

$y = R_\alpha(x) \to$

Rotations

Commençons avec un système dynamique simple :





Dynamique symbolique

A un système dynamique "géométrique", on a associé un nouveau système dynamique où

- l'espace est un ensemble de suites bi-infinies sur un ensemble fini de symboles : $\{\bullet, \bullet\}$;
- la dynamique est le décalage $S : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$.

Dynamique symbolique

A un système dynamique “géométrique”, on a associé un nouveau système dynamique où

- l’espace est un ensemble de suites bi-infinies sur un ensemble fini de symboles : $\{\bullet, \bullet\}$;
- la dynamique est le décalage $S : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$.

C’est l’idée de la dynamique symbolique !

Dynamique symbolique

A un système dynamique “géométrique”, on a associé un nouveau système dynamique où

- l'espace est un ensemble de suites bi-infinies sur un ensemble fini de symboles : $\{\bullet, \bullet\}$;
- la dynamique est le décalage $S : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$.

C'est l'idée de la dynamique symbolique !

Pour cet exposé, on oublie la dynamique et on regarde une seule suite à la fois.

Suites sturmiennes

Définition (Morse, Hedlund 1940)

Une suite est *sturmienne* si c'est le codage d'une orbite pour une rotation d'angle irrationnel.

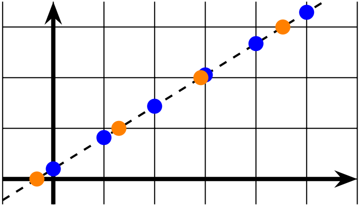
Suites sturmiennes

Définition (Morse, Hedlund 1940)

Une suite est *sturmienne* si c'est le codage d'une orbite pour une rotation d'angle irrationnel.

Autres interprétations géométriques :

suite de coupure



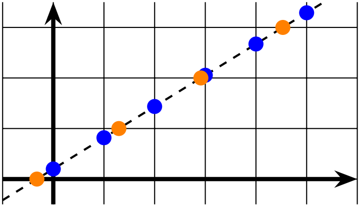
Suites sturmiennes

Définition (Morse, Hedlund 1940)

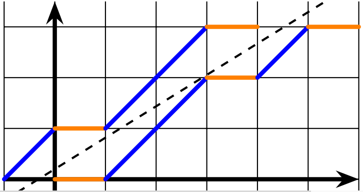
Une suite est *sturmienne* si c'est le codage d'une orbite pour une rotation d'angle irrationnel.

Autres interprétations géométriques :

suite de coupure



suite mécanique



Liens et applications non-géométriques

- développement en fraction continue des nombres irrationnels

Liens et applications non-géométriques

- développement en fraction continue des nombres irrationnels
- zéros des solutions de $y'' + a(x)y = 0$ où a est périodique

Liens et applications non-géométriques

- développement en fraction continue des nombres irrationnels
- zéros des solutions de $y'' + a(x)y = 0$ où a est périodique

mais aussi,

nombreuses caractérisations combinatoires

Un peu de vocabulaire

- Les symboles sont appelés *lettres* et l'ensemble des symboles est *l'alphabet*

  Exemple : 0 et • sont des lettres de l'alphabet $\{\bullet, 0, a\}$

Un peu de vocabulaire

- Les symboles sont appelés *lettres* et l'ensemble des symboles est *l'alphabet*
  Exemple : 0 et • sont des lettres de l'alphabet $\{\bullet, 0, a\}$
- Un *mot* est une suite finie de lettres
  Exemple : $0\bullet a00\bullet$ est un mot sur l'alphabet $\{\bullet, 0, a\}$

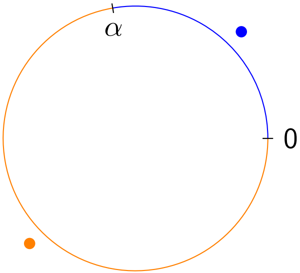
Un peu de vocabulaire

- Les symboles sont appelés *lettres* et l'ensemble des symboles est *l'alphabet*
  Exemple : 0 et • sont des lettres de l'alphabet $\{\bullet, 0, a\}$
- Un *mot* est une suite finie de lettres
  Exemple : $0\bullet a00\bullet$ est un mot sur l'alphabet $\{\bullet, 0, a\}$
- Le *langage* d'une suite est l'ensemble des mots qui apparaissent comme sous-suite consécutive, i.e.

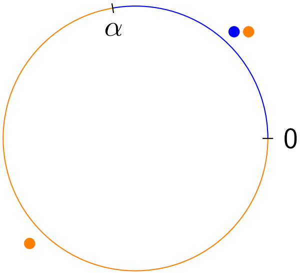
$$\mathcal{L}(x) = \{w : \exists\ i \leq j \text{ tq. } w = x_i x_{i+1} \cdots x_j\}.$$

Exemple :
$\mathcal{L}(\cdots 012.01201 \cdots) = \{\varepsilon, 0, 1, 2, 01, 12, 20, 012, 120, 201, \dots\}$

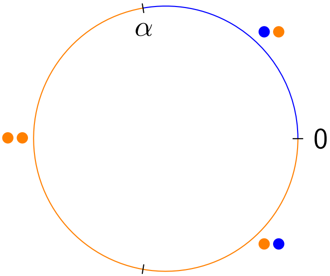
Langage



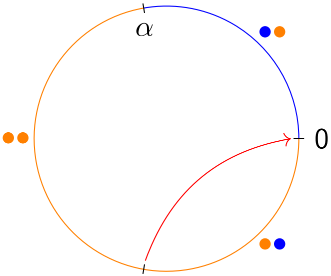
Langage



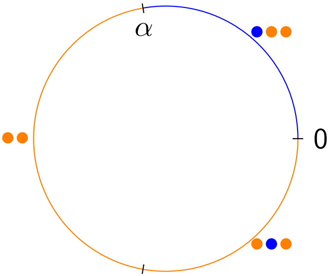
Langage



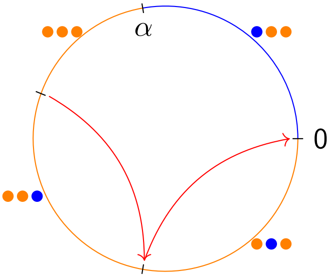
Langage



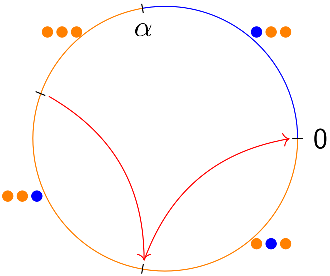
Langage



Langage



Langage



A chaque longueur, un seul intervalle se sépare en deux.

Mots spéciaux

Définition

Soient x une suite et $w \in \mathcal{L}(x)$.

- Les *extensions à droite* de w sont les lettres a telles que $wa \in \mathcal{L}(x)$.
- Les *extensions à gauche* de w sont les lettres a telles que $aw \in \mathcal{L}(x)$.

Mots spéciaux

Définition

Soient x une suite et $w \in \mathcal{L}(x)$.

- Les *extensions à droite* de w sont les lettres a telles que $wa \in \mathcal{L}(x)$.
- Les *extensions à gauche* de w sont les lettres a telles que $aw \in \mathcal{L}(x)$.

Un mot est *spécial à droite* (resp., *à gauche*) s'il a au moins deux extensions à droite (resp., à gauche).

Mots spéciaux

Définition

Soient x une suite et $w \in \mathcal{L}(x)$.

- Les *extensions à droite* de w sont les lettres a telles que $wa \in \mathcal{L}(x)$.
- Les *extensions à gauche* de w sont les lettres a telles que $aw \in \mathcal{L}(x)$.

Un mot est *spécial à droite* (resp., *à gauche*) s'il a au moins deux extensions à droite (resp., à gauche).

Proposition

Une suite est sturmienne si et seulement si elle est binaire et elle a un unique mot spécial à droite et un unique mot spécial à gauche de chaque longueur.

Complexité

Définition

La *complexité* de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$p_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \mapsto \#(\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n).$$

Complexité

Définition

La *complexité* de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$p_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \mapsto \#(\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n).$$

Proposition

Une suite x est sturmienne si et seulement si $p_x(n) = n + 1$ pour tout n et elle est récurrente.

Petite complexité

Théorème (Morse, Hedlund)

Soit x une suite. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *la suite x est périodique ;*
2. *p_x est borné ;*

Petite complexité

Théorème (Morse, Hedlund)

Soit x une suite. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *la suite x est périodique ;*
2. *p_x est borné ;*
3. *il existe n tel que $p_x(n) \leq n$.*

Petite complexité

Théorème (Morse, Hedlund)

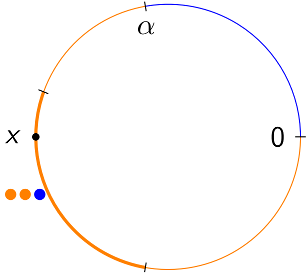
Soit x une suite. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *la suite x est périodique ;*
2. *p_x est borné ;*
3. *il existe n tel que $p_x(n) \leq n$.*

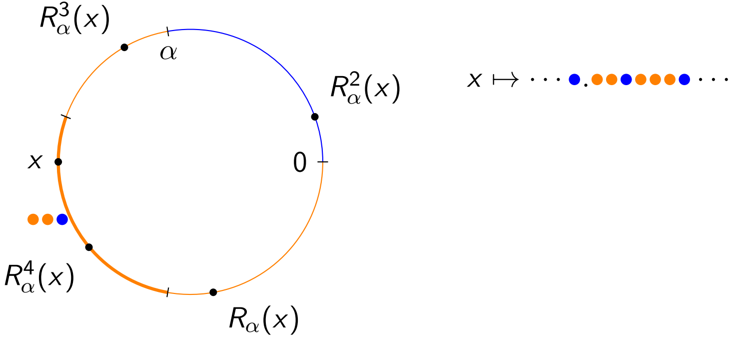
Conséquence :

Les suites sturmiennes sont les suites intéressantes les plus simples.

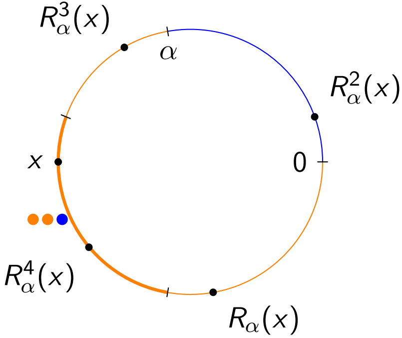
Mots de retour



Mots de retour

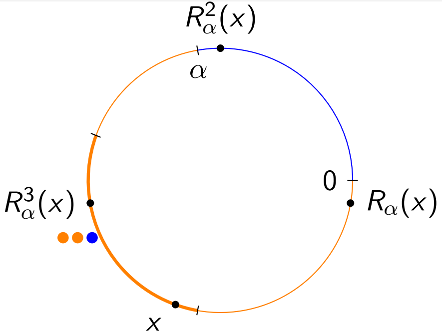


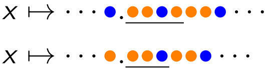
Mots de retour



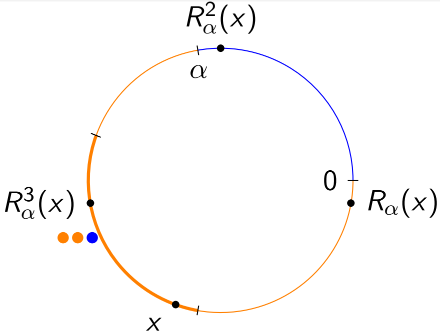
$x \mapsto \cdots$  $\cdots$

Mots de retour





Mots de retour



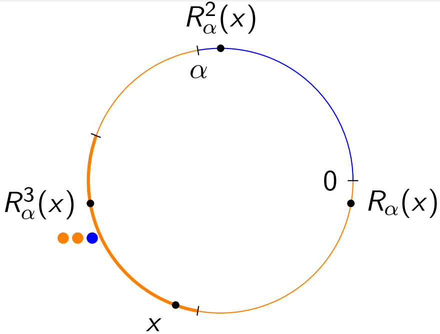
$x \mapsto \cdots$ ●.●●●●●●● $\cdots$

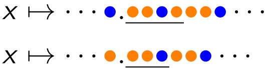
$x \mapsto \cdots$ ●.●●●●●● $\cdots$

mots de retour pour ●●● :

●●●●, ●●●

Mots de retour





mots de retour pour :

Définition (Durand 1998)

Un *mot de retour* pour w est un mot u tel que

$$uw \in \mathcal{L}(x) \cap w\mathcal{A}^+ \setminus \mathcal{A}^+ w \mathcal{A}^+.$$

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $\mathcal{R}_x(w)$.

Cas sturmien

Théorème (Vuillon)

Une suite x est sturmienne si et seulement si chaque $w \in \mathcal{L}(x)$ a exactement deux mots de retour.

Cas sturmien

Théorème (Vuillon)

Une suite x est sturmienne si et seulement si chaque $w \in \mathcal{L}(x)$ a exactement deux mots de retour.

De plus, si x est une suite sturmienne sur l'alphabet $\mathcal{A}$, alors

$$\langle \mathcal{R}_x(w) \rangle_{F_\mathcal{A}} = F_\mathcal{A}$$

pour tout $w \in \mathcal{L}(x)$.

Cas sturmien

Théorème (Vuillon)

Une suite x est sturmienne si et seulement si chaque $w \in \mathcal{L}(x)$ a exactement deux mots de retour.

De plus, si x est une suite sturmienne sur l'alphabet $\mathcal{A}$, alors

$$\langle \mathcal{R}_x(w) \rangle_{F_\mathcal{A}} = F_\mathcal{A}$$

pour tout $w \in \mathcal{L}(x)$.

Exemple,

$$\left\langle \textcolor{orange}{\bullet}\textcolor{orange}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{orange}{\bullet}, \textcolor{orange}{\bullet}\textcolor{orange}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet} \right\rangle_{F_{\{\textcolor{orange}{\bullet}, \textcolor{blue}{\bullet}\}}}$$

Cas sturmien

Théorème (Vuillon)

Une suite x est sturmienne si et seulement si chaque $w \in \mathcal{L}(x)$ a exactement deux mots de retour.

De plus, si x est une suite sturmienne sur l'alphabet $\mathcal{A}$, alors

$$\langle \mathcal{R}_x(w) \rangle_{F_{\mathcal{A}}} = F_{\mathcal{A}}$$

pour tout $w \in \mathcal{L}(x)$.

Exemple,

$$\left\langle \textcolor{orange}{\bullet}\textcolor{orange}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{orange}{\bullet}, \textcolor{orange}{\bullet}\textcolor{orange}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet} \right\rangle_{F_{\{\textcolor{orange}{\bullet}, \textcolor{blue}{\bullet}\}}} = \left\langle \textcolor{orange}{\bullet}, \textcolor{orange}{\bullet}\textcolor{orange}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet} \right\rangle_{F_{\{\textcolor{orange}{\bullet}, \textcolor{blue}{\bullet}\}}}$$

Cas sturmien

Théorème (Vuillon)

Une suite x est sturmienne si et seulement si chaque $w \in \mathcal{L}(x)$ a exactement deux mots de retour.

De plus, si x est une suite sturmienne sur l'alphabet $\mathcal{A}$, alors

$$\langle \mathcal{R}_x(w) \rangle_{F_{\mathcal{A}}} = F_{\mathcal{A}}$$

pour tout $w \in \mathcal{L}(x)$.

Exemple,

$$\langle {\color{orange}\bullet}{\color{orange}\bullet}{\color{blue}\bullet}{\color{orange}\bullet}, {\color{orange}\bullet}{\color{orange}\bullet}{\color{blue}\bullet} \rangle_{F_{\{{\color{orange}\bullet},{\color{blue}\bullet}\}}} = \langle {\color{orange}\bullet}, {\color{orange}\bullet}{\color{orange}\bullet}{\color{blue}\bullet} \rangle_{F_{\{{\color{orange}\bullet},{\color{blue}\bullet}\}}} = F_{\{{\color{orange}\bullet},{\color{blue}\bullet}\}}.$$

Jusqu'à présent

Les suites sturmiennes sont donc les suites qui ...

- codent les rotations

Jusqu'à présent

Les suites sturmiennes sont donc les suites qui ...

- codent les rotations
- sont binaires avec d'uniques mots spéciaux à droite et à gauche de chaque longueur

Jusqu'à présent

Les suites sturmiennes sont donc les suites qui ...

- codent les rotations
- sont binaires avec d'uniques mots spéciaux à droite et à gauche de chaque longueur
- sont de complexité $n+1$

Jusqu'à présent

Les suites sturmiennes sont donc les suites qui ...

- codent les rotations
- sont binaires avec d'uniques mots spéciaux à droite et à gauche de chaque longueur
- sont de complexité $n + 1$
- ont exactement deux mots de retour pour chaque mot

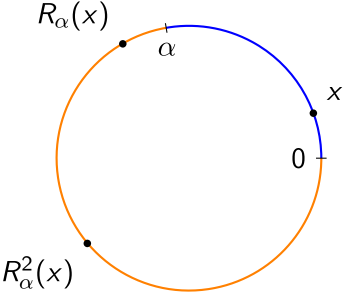
Jusqu'à présent

Les suites sturmiennes sont donc les suites qui ...

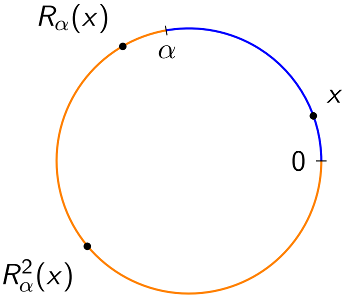
- codent les rotations
- sont binaires avec d'uniques mots spéciaux à droite et à gauche de chaque longueur
- sont de complexité $n+1$
- ont exactement deux mots de retour pour chaque mot

Généralisons à des alphabets plus grands !

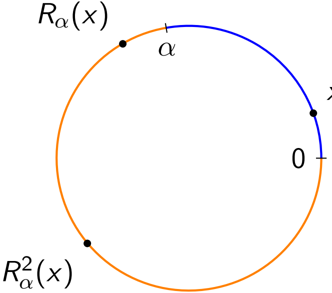
Échanges d'intervalles

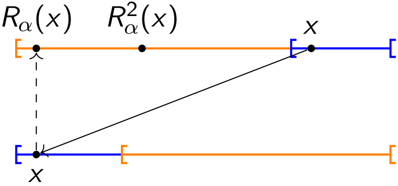


Échanges d'intervalles

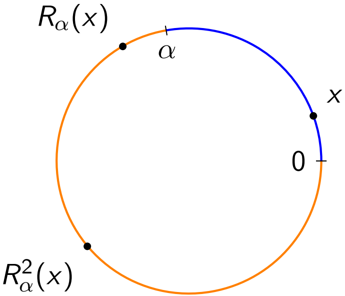


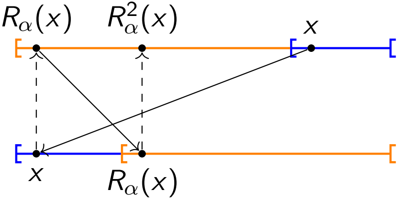
Échanges d'intervalles



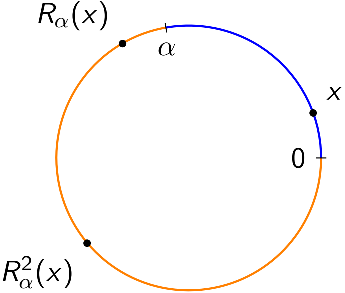


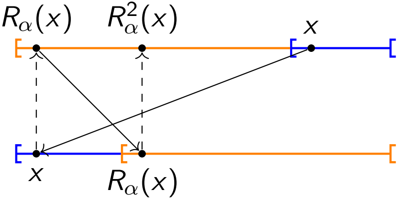
Échanges d'intervalles

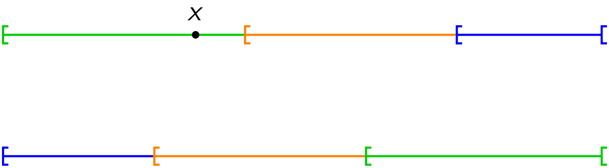




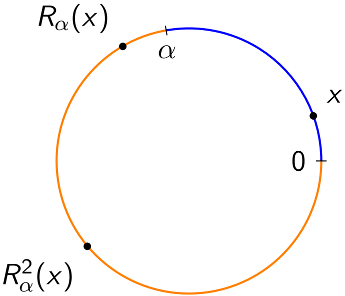
Échanges d'intervalles

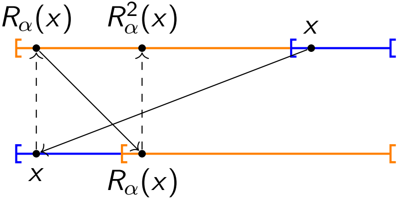


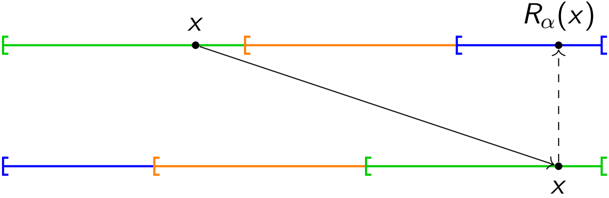




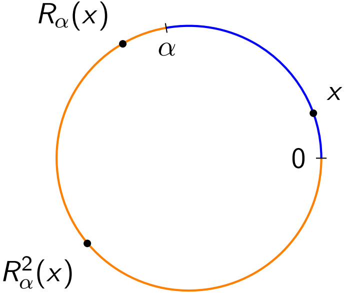
Échanges d'intervalles

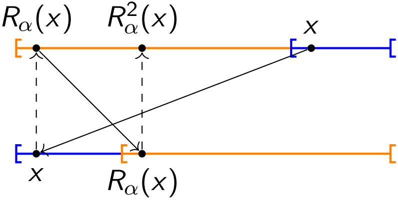


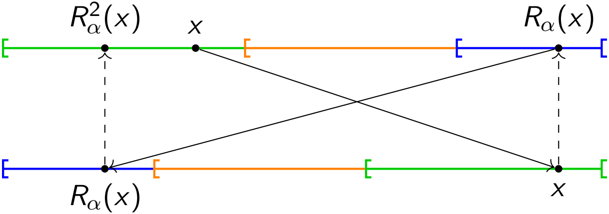




Échanges d'intervalles







Suites épisturmiennes

Une suite est

sturmienne $\iff$ binaire et uniques mots spéciaux à droite et à gauche de chaque longueur

Suites épisturmiennes

Une suite est

sturmienne $\Longleftrightarrow$ binaire et uniques mots spéciaux à droite et à gauche de chaque longueur

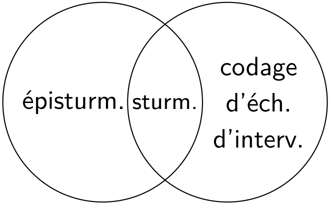
episturmienne $\Longleftrightarrow$ ~~binaire et~~ uniques mots spéciaux à droite et à gauche de chaque longueur

Suites épisturmiennes

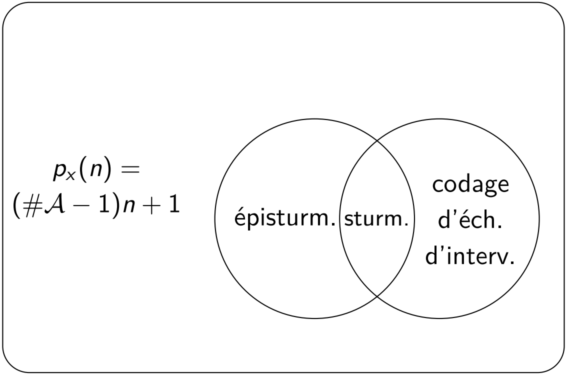
Une suite est

sturmienne	$\Longleftrightarrow$	binaire et uniques mots spéciaux à droite et à gauche de chaque longueur
episturmienne	$\Longleftrightarrow$	~~binaire et~~ uniques mots spéciaux à droite et à gauche de chaque longueur <u>qui ont toutes les lettres pour extensions</u>

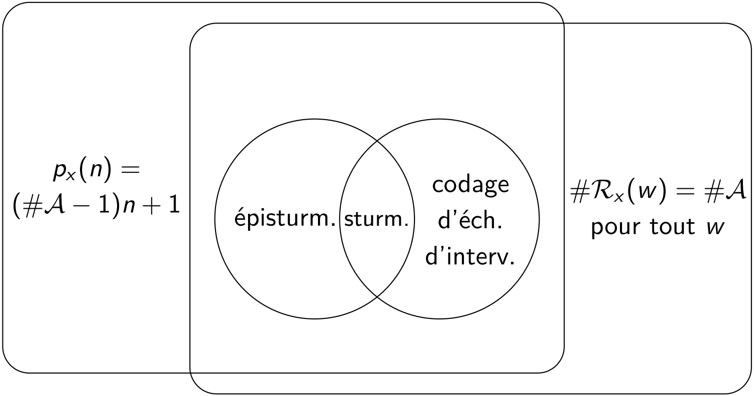
Hiérarchie



Hiérarchie



Hiérarchie


$p_x(n) =$
$(\#\mathcal{A} - 1)n + 1$
épisturm.
sturm.
codage
d'éch.
d'interv.
$\#\mathcal{R}_x(w) = \#\mathcal{A}$
pour tout w

Graphe d'extensions

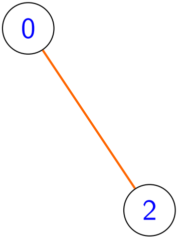
$$x = \cdots 001021.1001001021101100 \cdots$$

$$\mathcal{E}_x(10)$$

Graphe d'extensions

$$x = \cdots 001021.1001001021101100 \cdots$$

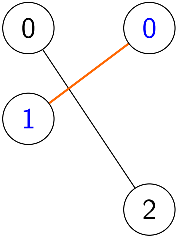
$$\mathcal{E}_x(10)$$



Graphe d'extensions

$$x = \cdots 001021.1001001021101100 \cdots$$

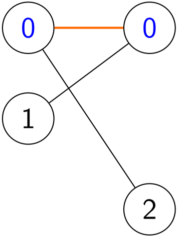
$$\mathcal{E}_x(10)$$



Graphe d'extensions

$$x = \cdots 001021.10\textcolor{blue}{0}\textcolor{orange}{10}\textcolor{blue}{0}1021101100\cdots$$

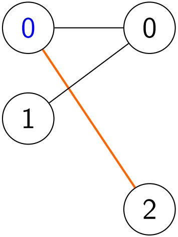
$$\mathcal{E}_x(10)$$



Graphe d'extensions

$$x = \cdots 001021.1001001021101100\cdots$$

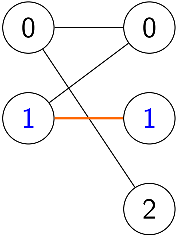
$$\mathcal{E}_x(10)$$



Graphe d'extensions

$$x = \cdots 001021.1001001021101100 \cdots$$

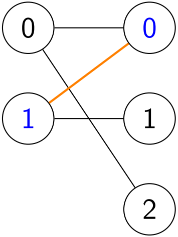
$\mathcal{E}_x(10)$



Graphe d'extensions

$$x = \cdots 001021.10010010211011 00 \cdots$$

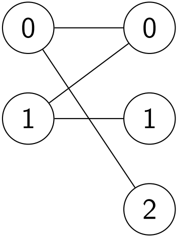
$\mathcal{E}_x(10)$



Graphe d'extensions

$$x = \cdots 001021.1001001021101100 \cdots$$

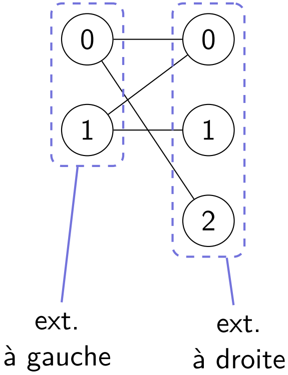
$$\mathcal{E}_x(10)$$



Graphe d'extensions

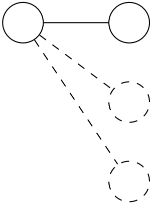
$$x = \cdots 001021.1001001021101100 \cdots$$

$\mathcal{E}_x(10)$



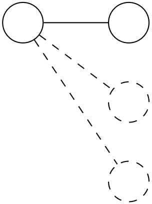
Mots spéciaux

pas spécial à gauche

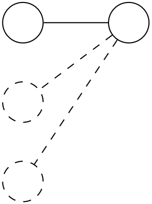


Mots spéciaux

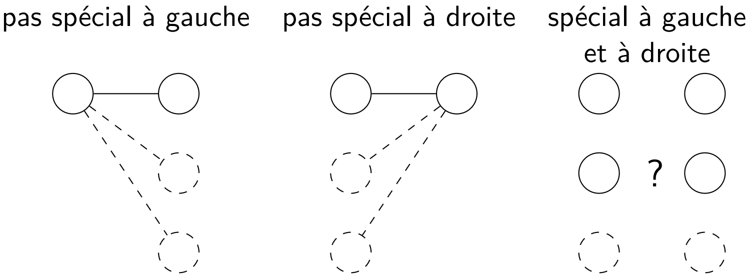
pas spécial à gauche



pas spécial à droite

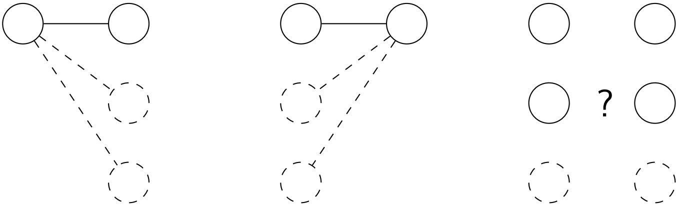


Mots spéciaux

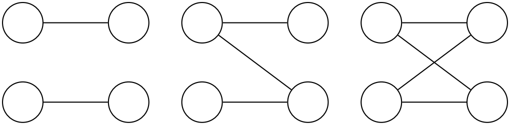


Mots spéciaux

pas spécial à gauche | pas spécial à droite | spécial à gauche et à droite

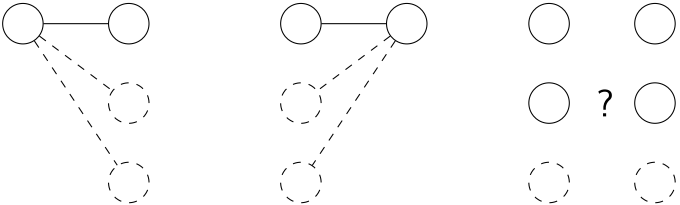


Cas sturmien :

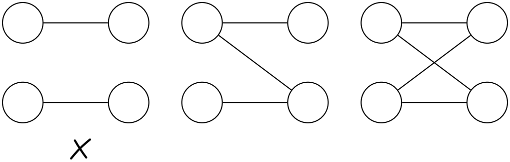


Mots spéciaux

pas spécial à gauche — pas spécial à droite — spécial à gauche et à droite

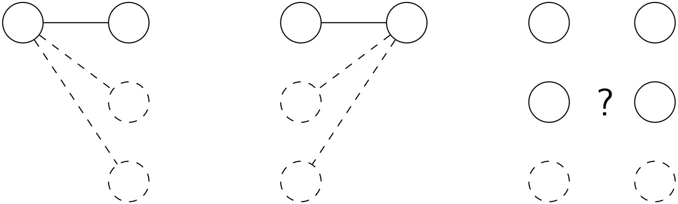


Cas sturmien :

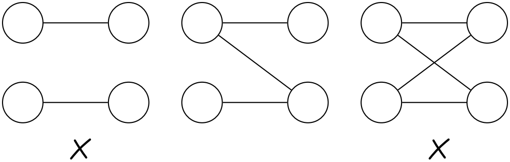


Mots spéciaux

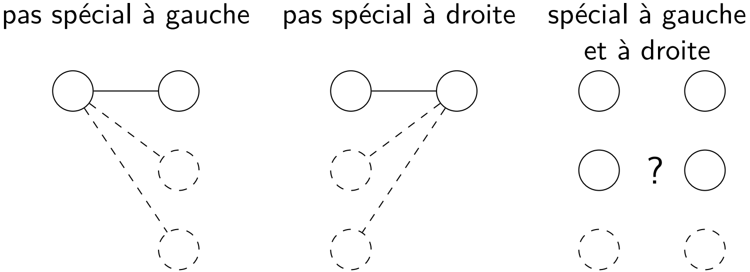
pas spécial à gauche | pas spécial à droite | spécial à gauche et à droite



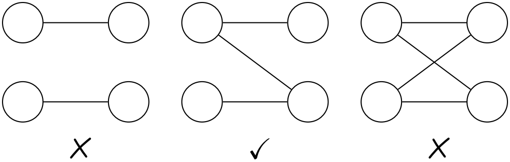
Cas sturmien :



Mots spéciaux



Cas sturmien :



Dendricité

Définition (Berthé *et al.* 2015)

Un mot $w \in \mathcal{L}(x)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre ($=$ acyclique et connexe).

Dendricité

Définition (Berthé *et al.* 2015)

Un mot $w \in \mathcal{L}(x)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre (= acyclique et connexe).

Une suite x est *dendrique* si tout $w \in \mathcal{L}(x)$ est dendrique.

Dendricité

Définition (Berthé *et al.* 2015)

Un mot $w \in \mathcal{L}(x)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre ($=$ acyclique et connexe).

Une suite x est *dendrique* si tout $w \in \mathcal{L}(x)$ est dendrique.

- les suites sturmiennes sont dendriques

Dendricité

Définition (Berthé *et al.* 2015)

Un mot $w \in \mathcal{L}(x)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre ($=$ acyclique et connexe).

Une suite x est *dendrique* si tout $w \in \mathcal{L}(x)$ est dendrique.

- les suites sturmiennes sont dendriques
- les suites épisturmiennes sont dendriques

Dendricité

Définition (Berthé *et al.* 2015)

Un mot $w \in \mathcal{L}(x)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre (= acyclique et connexe).

Une suite x est *dendrique* si tout $w \in \mathcal{L}(x)$ est dendrique.

- les suites sturmiennes sont dendriques
- les suites épisturmiennes sont dendriques
- les codages d'échanges d'intervalles sont dendriques

Dendricité et complexité

Proposition (Cassaigne)

Pour tout suite x et tout $n \in \mathbb{N}$

$$(p_x(n+2) - p_x(n+1)) - (p_x(n+1) - p_x(n)) = \sum_{w \in \mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n} m_x(w)$$

où $m_x(w) = \#E_x(w) - \#E_x^G(w) - \#E_x^R(w) + 1$.

Dendricité et complexité

Proposition (Cassaigne)

Pour tout suite x et tout $n \in \mathbb{N}$

$$(p_x(n+2) - p_x(n+1)) - (p_x(n+1) - p_x(n)) = \sum_{w \in \mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n} m_x(w)$$

où $m_x(w) = \#E_x(w) - \#E_x^G(w) - \#E_x^R(w) + 1.$

Si x est dendrique, alors $m_x(w) = 0$!

Dendricité et complexité

Proposition (Cassaigne)

Pour tout suite x et tout $n \in \mathbb{N}$

$$(p_x(n+2) - p_x(n+1)) - (p_x(n+1) - p_x(n)) = \sum_{w \in \mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n} m_x(w)$$

où $m_x(w) = \#E_x(w) - \#E_x^G(w) - \#E_x^R(w) + 1.$

Si x est dendrique, alors $m_x(w) = 0$!

Corollaire

Si x est dendrique sur l'alphabet $\mathcal{A}$, alors

$$p_x(n) = (\#\mathcal{A} - 1)n + 1.$$

Dendricité et mots de retour

Proposition (Balková, Pelantová, Steiner)

Si x est dendrique sur l'alphabet $\mathcal{A}$, alors $\#\mathcal{R}_x(w) = \#\mathcal{A}$ pour tout $w \in \mathcal{L}(x)$.

Dendricité et mots de retour

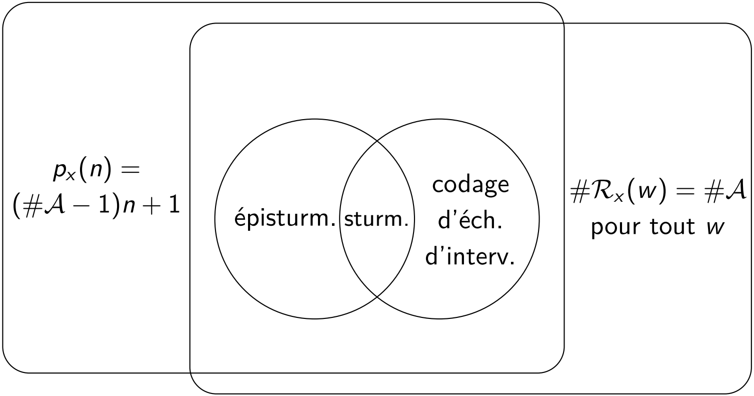
Proposition (Balková, Pelantová, Steiner)

Si x est dendrique sur l'alphabet $\mathcal{A}$, alors $\#\mathcal{R}_x(w) = \#\mathcal{A}$ pour tout $w \in \mathcal{L}(x)$.

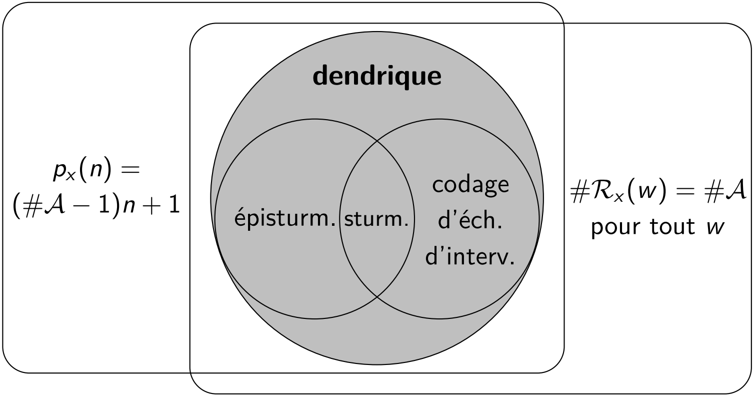
Théorème (Berthé *et al.* & G., Goulet-Ouellet, Leroy, Stas)

Une suite x sur l'alphabet $\mathcal{A}$ est dendrique si et seulement si $\#\mathcal{R}_x(w) = \#\mathcal{A}$ et $\langle \mathcal{R}_x(w) \rangle_{F_\mathcal{A}} = F_\mathcal{A}$ pour tout $w \in \mathcal{L}(x)$.

Hiérarchie 2.0



Hiérarchie 2.0



Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

$$\cdots 010020010020 \cdots$$

10 01

00

20 02

Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

$$\cdots 010020010020 \cdots$$

$$\begin{tikzcd}
10 & & 01 \arrow[ll, "0"'] \\
& 00 & \\
20 & & 02
\end{tikzcd}$$

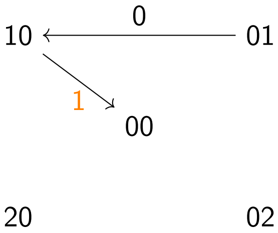
Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

$$\cdots 0100200100 20 \cdots$$



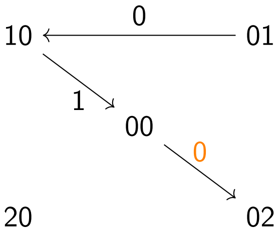
Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

$$\cdots 010020010020 \cdots$$



Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

$$\cdots 010\textcolor{orange}{0}\textcolor{blue}{20}010020 \cdots$$

$$\begin{tikzcd}
10 \arrow[dr, "1"'] & & 01 \arrow[ll, "0"'] \\
& 00 \arrow[dr, "0"] & \\
20 & & 02 \arrow[ll, "\textcolor{orange}{0}"']
\end{tikzcd}$$

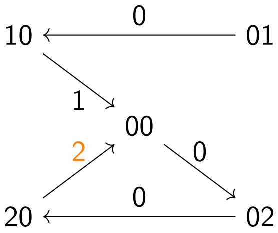
Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

$$\cdots 0100200010020 \cdots$$



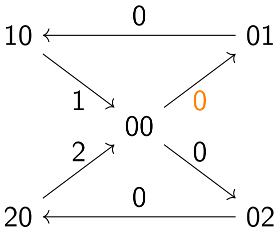
Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

$$\cdots 01002\textcolor{orange}{0}\textcolor{blue}{01}0020 \cdots$$



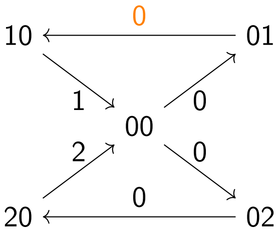
Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

$$\cdots 010020{\color{orange}0}{\color{blue}10}020 \cdots$$



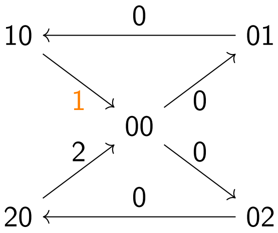
Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

$$\cdots 0100200100 20 \cdots$$



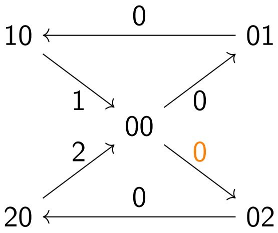
Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

$$\cdots 010020010020 \cdots$$



Graphes de Rauzy

Definition

Le *graphe de Rauzy d'ordre n* de x est le graphe $\Gamma_x(n)$ où

- les sommets sont les éléments de $\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n$;
- on a l'arc (u, v, a) si $av \in u\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(x)$.

$$\cdots 010020010020 \cdots$$

$$\begin{tikzcd}
10 \arrow[dr, "1"'] & & 01 \arrow[ll, "0"'] \\
& 00 \arrow[ur, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\
20 \arrow[ur, "2"] & & 02 \arrow[ll, "0"]
\end{tikzcd}$$

Evolution de graphes

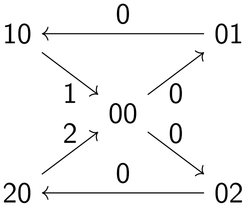
Les chemins dans les graphes de Rauzy sont liés aux

- mots de retour
- mesures invariantes/ergodiques
- fréquences

Evolution de graphes

Les chemins dans les graphes de Rauzy sont liés aux

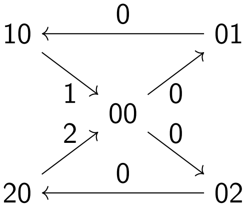
- mots de retour
- mesures invariantes/ergodiques
- fréquences

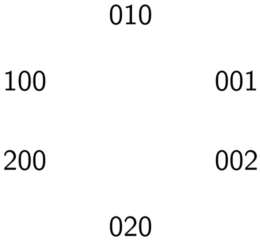


Evolution de graphes

Les chemins dans les graphes de Rauzy sont liés aux

- mots de retour
- mesures invariantes/ergodiques
- fréquences

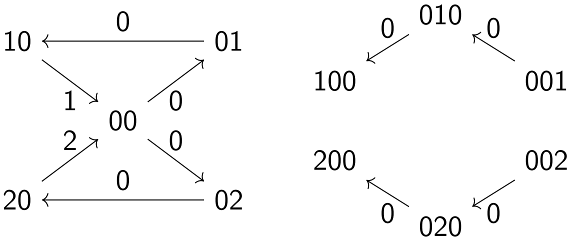




Evolution de graphes

Les chemins dans les graphes de Rauzy sont liés aux

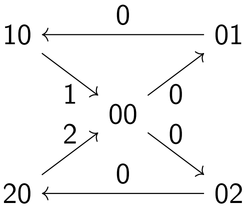
- mots de retour
- mesures invariantes/ergodiques
- fréquences

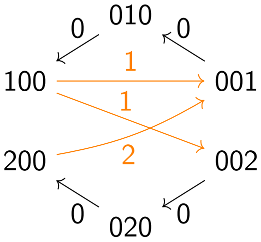


Evolution de graphes

Les chemins dans les graphes de Rauzy sont liés aux

- mots de retour
- mesures invariantes/ergodiques
- fréquences

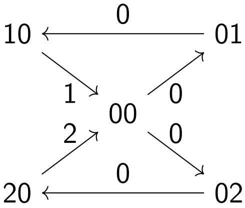


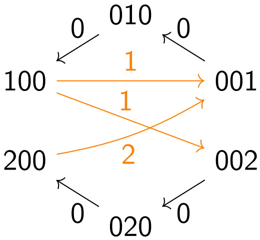


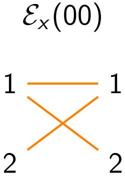
Evolution de graphes

Les chemins dans les graphes de Rauzy sont liés aux

- mots de retour
- mesures invariantes/ergodiques
- fréquences



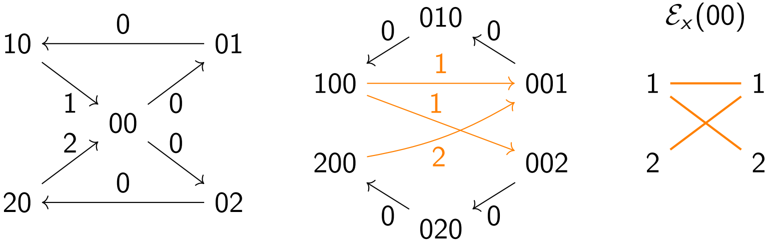




Evolution de graphes

Les chemins dans les graphes de Rauzy sont liés aux

- mots de retour
- mesures invariantes/ergodiques
- fréquences



Si les graphes d'extensions sont des arbres, les propriétés des chemins sont "préservées".

Ultime dendricité

Définition (Dolce, Perrin 2019)

Une suite est *ultimement dendrique* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que tout $w \in \mathcal{L}(x)$ de longueur $\geq n$ est dendrique.

Ultime dendricité

Définition (Dolce, Perrin 2019)

Une suite est *ultimement dendrique* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que tout $w \in \mathcal{L}(x)$ de longueur $\geq n$ est dendrique.

- stable pour beaucoup d'opérations usuelles
- complexité ultimement affine
- nombre de mots de retour ultimement constant

Merci pour votre attention !