Survol de la dendricité et de l'ultime dendricité

France Gheeraert

5 avril 2024

Radboud Universiteit

Sous-shifts

Définition

Soit un A un ensemble fini. Un *sous-shift* est un sous-ensemble de $A^{\mathbb{Z}}$ qui est

- fermé pour la topologie produit,
- stable pour la dynamique $S : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$.

Sous-shifts

Définition

Soit un A un ensemble fini. Un *sous-shift* est un sous-ensemble de $A^{\mathbb{Z}}$ qui est

- fermé pour la topologie produit,
- stable pour la dynamique $S : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$.

Un sous-shift est *minimal* si les seuls sous-shifts qu'il contient sont lui-même et $\emptyset$.

Sous-shifts

Définition

Soit un A un ensemble fini. Un *sous-shift* est un sous-ensemble de $A^{\mathbb{Z}}$ qui est

- fermé pour la topologie produit,
- stable pour la dynamique $S : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$.

Un sous-shift est *minimal* si les seuls sous-shifts qu'il contient sont lui-même et $\emptyset$.

Exemple :

$$X = \{S^i(\cdots 000.1000\cdots) : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\cdots 000.000\cdots\}$$

est un sous-shift qui n'est pas minimal.

Langages

Définition

Le *langage* de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$\mathcal{L}(x) = \{w : \exists\ i \leq j \text{ tq. } w = x_i \cdots x_j\}.$$

Le *langage* d'un sous-shift X est $\mathcal{L}(X) = \cup_{x \in X} \mathcal{L}(x)$.

Langages

Définition

Le *langage* de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$\mathcal{L}(x) = \{w : \exists\ i \leq j \text{ tq. } w = x_i \cdots x_j\}.$$

Le *langage* d'un sous-shift X est $\mathcal{L}(X) = \cup_{x \in X} \mathcal{L}(x)$.

Exemple : Si

$$X = \{S^i(\cdots 000.1000 \cdots) : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\cdots 000.000 \cdots\},$$

alors $\mathcal{L}(X) = \{w \in \{0,1\}^* \text{ contenant au plus un } 1\}$.

Langages

Définition

Le *langage* de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$\mathcal{L}(x) = \{w : \exists\ i \leq j \text{ tq. } w = x_i \cdots x_j\}.$$

Le *langage* d'un sous-shift X est $\mathcal{L}(X) = \cup_{x \in X} \mathcal{L}(x)$.

Exemple : Si

$$X = \{S^i(\cdots 000.1000 \cdots) : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\cdots 000.000 \cdots\},$$

alors $\mathcal{L}(X) = \{w \in \{0,1\}^*$ contenant au plus un $1\}$.

Définition

La *complexité* de $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$p_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \mapsto \#(\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n).$$

Sous-shifts Sturmiens

Théorème (Morse, Hedlund)

Soit X un sous-shift minimal. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *X est périodique ;*
2. *il existe C tel que $p_X \leq C$;*
3. *il existe N tel que $p_X(N) \leq N$.*

Sous-shifts Sturmiens

Théorème (Morse, Hedlund)

Soit X un sous-shift minimal. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *X est périodique ;*
2. *il existe C tel que $p_X \leq C$;*
3. *il existe N tel que $p_X(N) \leq N$.*

Définition

Un sous-shift est *Sturmien* s'il est minimal et $p_X(n) = n + 1$ pour tout n.

Graphes d'extensions

$$\cdots 10010011001001001101100 \cdots$$

$\mathcal{E}_X(10)$

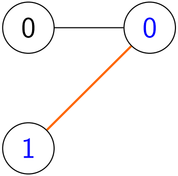
$$\cdots 10\textcolor{blue}{0}\textcolor{orange}{10}\textcolor{blue}{0}11001001001101100 \cdots$$

$\mathcal{E}_X(10)$

Graphes d'extensions

$\cdots 1001001100100100 1101100 \cdots$

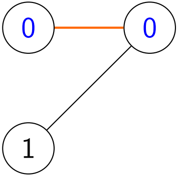
$\mathcal{E}_X(10)$



Graphes d'extensions

$$\cdots 10010011001001001101100 \cdots$$

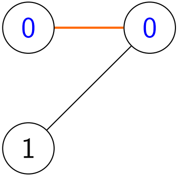
$\mathcal{E}_X(10)$



Graphes d'extensions

$$\cdots 100100110010\textcolor{blue}{0}\textcolor{orange}{10}\textcolor{blue}{0}1101100 \cdots$$

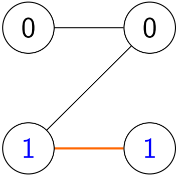
$\mathcal{E}_X(10)$



Graphes d'extensions

$$\cdots 10010011001001001101100 \cdots$$

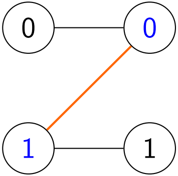
$\mathcal{E}_X(10)$



Graphes d'extensions

$$\cdots 10010011001001001101100 \cdots$$

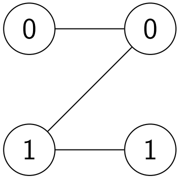
$\mathcal{E}_X(10)$



Graphes d'extensions

$$\cdots 10010011001001001101100 \cdots$$

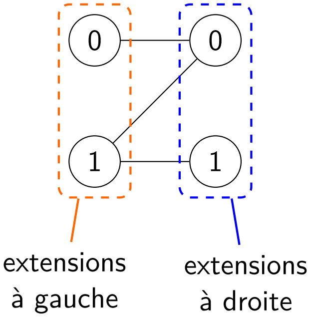
$\mathcal{E}_X(10)$



Graphes d'extensions

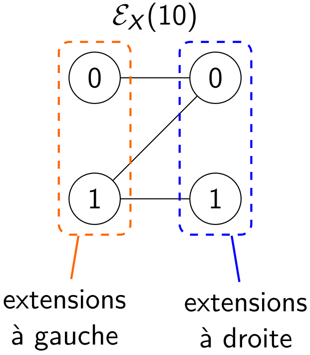
$$\cdots 1001001100100100110110 0\cdots$$

$\mathcal{E}_X(10)$



Graphes d'extensions

$$\cdots 100100110010010011011000 \cdots$$



Notations :

$$EG_X(w) = \{a : aw \in \mathcal{L}(X)\}$$

$$ED_X(w) = \{b : wb \in \mathcal{L}(X)\}$$

$$E_X(w) = \{(a, b) : awb \in \mathcal{L}(X)\}$$

Dendricité

Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Dendricité

Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Un sous-shift X est *dendrique* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont dendriques.

Dendricité

Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Un sous-shift X est *dendrique* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont dendriques.

Proposition

- *Tout sous-shift Sturmien est dendrique.*

Dendricité

Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Un sous-shift X est *dendrique* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont dendriques.

Proposition

- *Tout sous-shift Sturmien est dendrique.*
- *Tout sous-shift d'Arnoux-Rauzy (ou épisturmien strict) est dendrique.*
- *Tout codage d'échange d'intervalles régulier est dendrique.*

Dendricité et complexité

Proposition

Si X est dendrique avec d lettres, alors $p_X(n) = (d-1)n + 1$.

Dendricité et complexité

Proposition

Si X est dendrique avec d lettres, alors $p_X(n) = (d-1)n + 1$.

Proposition (Cassaigne)

Soit $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$s_X(n+1) - s_X(n) = \sum_{w \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{A}^n} \# E_X(w) - \# EG_X(w) - \# ED_X(w) + 1$$

où $s_X(n) = p_X(n+1) - p_X(n)$.

Dendricité et neutralité

Définition

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *neutre* si

$$\# E_X(w) - \# EG_X(w) - \# ED_X(w) + 1 = 0.$$

Un sous-shift X est *neutre* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont neutres.

Dendricité et neutralité

Définition

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *neutre* si

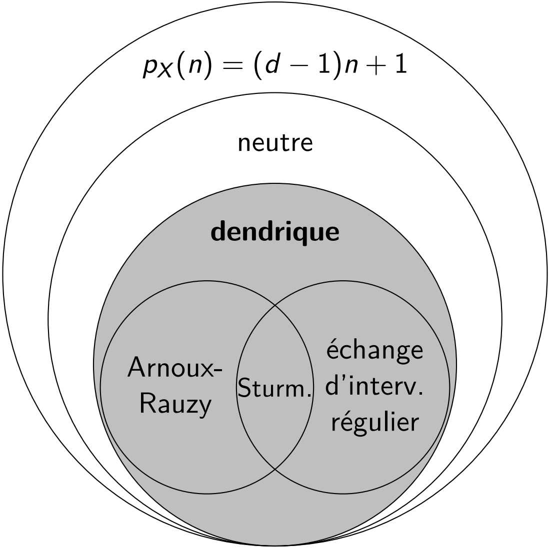
$$\# E_X(w) - \# EG_X(w) - \# ED_X(w) + 1 = 0.$$

Un sous-shift X est *neutre* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont neutres.

Proposition

- *Tout sous-shift dendrique est neutre.*
- *Si X est neutre avec d lettres, alors $p_X(n) = (d-1)n + 1$.*

Résumé


$p_X(n) = (d-1)n + 1$
neutre
dendrique
Arnoux-
Rauzy
Sturm.
échange
d'interv.
régulier

Mots de retour

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que

$uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Mots de retour

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que

$uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$$\cdots 1001001100100100110110 0\cdots$$

alors $R_X(10) =$

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que

$uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$$\cdots 10010011001001001101100 \cdots$$

alors $R_X(10) = \{100$

Mots de retour

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que

$uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$$\cdots 100{\color{blue}1001}{\color{orange}10}01001001101100 \cdots$$

alors $R_X(10) = \{100, 1001$

Mots de retour

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que

$uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$$\cdots 100100110010 01001101100 \cdots$$

alors $R_X(10) = \{100, 1001$

Mots de retour

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que

$uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$$\cdots 10010011001001001101100 \cdots$$

alors $R_X(10) = \{100, 1001$

Mots de retour

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que

$uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$$\cdots 1001001100100{\color{blue}1001}{\color{orange}10}1100 \cdots$$

alors $R_X(10) = \{100, 1001$

Mots de retour

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que

$uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$$\cdots 100100110010010011011 00\cdots$$

alors $R_X(10) = \{100, 1001, 101$

Mots de retour

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que

$uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$$\cdots 10010011001001001101100 \cdots$$

alors $R_X(10) = \{100, 1001, 101, \ldots\}$.

Dendricité et mots de retour

Théorème (Balková, Pelantová, Steiner)

Si X est neutre minimal avec d lettres, alors $\# R_X(w) = d$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$.

Dendricité et mots de retour

Théorème (Balková, Pelantová, Steiner)

Si X est neutre minimal avec d lettres, alors $\# R_X(w) = d$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$.

Théorème (Berthé *et al.*)

Si X est dendrique minimal sur l'alphabet $\mathcal{A}$, alors $R_X(w)$ est une base du groupe libre sur $\mathcal{A}$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$.

Dendricité et stabilité

Définition

Soient X minimal, $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$ et $\sigma : \mathcal{B} \to R_X(w)$ une bijection.
Le *dérivé de X par rapport à w* est

$$D_w(X) = \{y \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} : \cdots \sigma(y_{-1}).\sigma(y_0)\sigma(y_1)\cdots \in X\}.$$

Dendricité et stabilité

Définition

Soient X minimal, $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$ et $\sigma : \mathcal{B} \to R_X(w)$ une bijection.
Le *dérivé de X par rapport à w* est

$$D_w(X) = \{y \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} : \cdots \sigma(y_{-1}).\sigma(y_0)\sigma(y_1) \cdots \in X\}.$$

Théorème (Berthé *et al.*)

- *Tout dérivé d'un sous-shift dendrique minimal est dendrique minimal.*

Dendricité et stabilité

Définition

Soient X minimal, $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$ et $\sigma : \mathcal{B} \to R_X(w)$ une bijection.
Le *dérivé de X par rapport à w* est

$$D_w(X) = \{y \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} : \cdots \sigma(y_{-1}).\sigma(y_0)\sigma(y_1)\cdots \in X\}.$$

Théorème (Berthé *et al.*)

- *Tout dérivé d'un sous-shift dendrique minimal est dendrique minimal.*
- *Tout décodage bifixe maximal d'un sous-shift dendrique minimal est dendrique.*

Dendricité et **in**stabilité

Définition

Un *morphisme* est une application $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ étendue par :

- $\sigma(w_1 \cdots w_n) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_n)$,
- $\sigma(\cdots x_{-1}.x_0 x_1 \cdots) = \cdots \sigma(x_{-1}).\sigma(x_0)\sigma(x_1) \cdots$,
- $\sigma(X) = \{S^k(\sigma(x)) : x \in X, k < |\sigma(x_0)|\}$.

Dendricité et **in**stabilité

Définition

Un *morphisme* est une application $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ étendue par :

- $\sigma(w_1 \cdots w_n) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_n)$,
- $\sigma(\cdots x_{-1}.x_0 x_1 \cdots) = \cdots \sigma(x_{-1}).\sigma(x_0)\sigma(x_1) \cdots$,
- $\sigma(X) = \{S^k(\sigma(x)) : x \in X, k < |\sigma(x_0)|\}$.

C'est un *morphisme de retour (pour w)* s'il existe un sous-shift X tel que $\sigma_{|_\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to R_X(w)$ est une bijection.

Dendricité et **in**stabilité

Définition

Un *morphisme* est une application $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ étendue par :

- $\sigma(w_1 \cdots w_n) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_n)$,
- $\sigma(\cdots x_{-1}.x_0 x_1 \cdots) = \cdots \sigma(x_{-1}).\sigma(x_0)\sigma(x_1) \cdots$,
- $\sigma(X) = \{S^k(\sigma(x)) : x \in X, k < |\sigma(x_0)|\}$.

C'est un *morphisme de retour (pour w)* s'il existe un sous-shift X tel que $\sigma_{|\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to R_X(w)$ est une bijection.

Proposition

Soient X minimal et σ un morphisme de retour pour w.

- *$\sigma(X)$ dendrique $\Rightarrow$ X dendrique [Berthé et al.];*

Dendricité et **in**stabilité

Définition

Un *morphisme* est une application $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ étendue par :

- $\sigma(w_1 \cdots w_n) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_n)$,
- $\sigma(\cdots x_{-1}.x_0 x_1 \cdots) = \cdots \sigma(x_{-1}).\sigma(x_0)\sigma(x_1) \cdots$,
- $\sigma(X) = \{S^k(\sigma(x)) : x \in X, k < |\sigma(x_0)|\}$.

C'est un *morphisme de retour (pour w)* s'il existe un sous-shift X tel que $\sigma_{|_\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to R_X(w)$ est une bijection.

Proposition

Soient X minimal et σ un morphisme de retour pour w.

- *$\sigma(X)$ dendrique $\Rightarrow$ X dendrique [Berthé et al.];*
- *X dendrique $\not\Rightarrow$ $\sigma(X)$ dendrique*

Dendricité et **in**stabilité

Définition

Un *morphisme* est une application $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ étendue par :

- $\sigma(w_1 \cdots w_n) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_n)$,
- $\sigma(\cdots x_{-1}.x_0 x_1 \cdots) = \cdots \sigma(x_{-1}).\sigma(x_0)\sigma(x_1) \cdots$,
- $\sigma(X) = \{S^k(\sigma(x)) : x \in X, k < |\sigma(x_0)|\}$.

C'est un *morphisme de retour (pour w)* s'il existe un sous-shift X tel que $\sigma_{|_\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to R_X(w)$ est une bijection.

Proposition

Soient X minimal et σ un morphisme de retour pour w.

- *$\sigma(X)$ dendrique $\Rightarrow$ X dendrique [Berthé et al.] ;*
- *X dendrique $\not\Leftarrow$ $\sigma(X)$ dendrique mais il existe un critère "simple" pour savoir quand c'est le cas [G., Leroy].*

Dendricité et **in**stabilité (2)

Proposition (G.)

Un morphisme σ est tel que (X dendrique $\Rightarrow \sigma(X)$ dendrique) si et seulement si c'est, à codage bijectif près, une composition de morphismes d'Arnoux-Rauzy, i.e. de morphismes

$$L_a : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \quad \forall b \neq a \end{cases} \qquad R_a : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ba \quad \forall b \neq a \end{cases}.$$

Dendricité et **in**stabilité (2)

Proposition (G.)

Un morphisme σ est tel que (X dendrique $\Rightarrow \sigma(X)$ dendrique) si et seulement si c'est, à codage bijectif près, une composition de morphismes d'Arnoux-Rauzy, i.e. de morphismes

$$L_a : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \quad \forall b \neq a \end{cases} \qquad R_a : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ba \quad \forall b \neq a \end{cases}.$$

Corollaire (G.)

Un morphisme sur 3 lettres ou plus est tel que (X codage de RIET $\Rightarrow \sigma(X)$ codage de RIET) si et seulement si c'est un codage bijectif.

Isomorphisme

Définition

Deux sous-shifts X et Y sont *isomorphes* (ou *conjugués*) s'il existe une bijection $\varphi : X \to Y$ qui soit continue et respecte la dynamique.

Isomorphisme

Définition

Deux sous-shifts X et Y sont *isomorphes* (ou *conjugués*) s'il existe une bijection $\varphi : X \to Y$ qui soit continue et respecte la dynamique.

De façon équivalente ([Curtis, Hedlund, Lyndon]), s'il existe une bijection $\varphi : X \to Y$ pour laquelle il existe $N \geq 1$, $k < N$ and un codage θ tels que, pour tout $x \in X$,

$$\varphi(x) = S^{-k}\theta(x^{(N)})$$

où $x^{(N)} = (x_n \cdots x_{n+N-1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Isomorphisme

Définition

Deux sous-shifts X et Y sont *isomorphes* (ou *conjugués*) s'il existe une bijection $\varphi : X \to Y$ qui soit continue et respecte la dynamique.

De façon équivalente ([Curtis, Hedlund, Lyndon]), s'il existe une bijection $\varphi : X \to Y$ pour laquelle il existe $N \geq 1$, $k < N$ and un codage θ tels que, pour tout $x \in X$,

$$\varphi(x) = S^{-k}\theta(x^{(N)})$$

où $x^{(N)} = (x_n \cdots x_{n+N-1})_{n\in\mathbb{Z}}$.
Autrement dit, tout isomorphisme peut-être décomposé en

1. l'isomorphisme naturel entre X et un certain
$$X^{(N)} := \{x^{(N)} : x \in X\},$$
2. un codage entre $X^{(N)}$ et Y, injectif sur $X^{(N)}$.

Dendricité et isomorphisme

Proposition

Soit $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$*.*

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ *pour un* $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ *bien choisi ;*

Dendricité et isomorphisme

Proposition

Soit $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$.

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ *pour un* $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ *bien choisi si* $w \neq \varepsilon$;
- *si* $w = \varepsilon$, *alors* $\mathcal{E}_{X(N)}(w) \cong \sqcup_{v \in \mathcal{L}_{N-1}(X)} \mathcal{E}_X(v)$.

Dendricité et isomorphisme

Proposition

Soit $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$.

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ *pour un* $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ *bien choisi si* $w \neq \varepsilon$ *;*
- *si* $w = \varepsilon$*, alors* $\mathcal{E}_{X(N)}(w) \cong \sqcup_{v \in \mathcal{L}_{N-1}(X)} \mathcal{E}_X(v)$*.*

Si $N \geq 2$, alors le graphe d'extension de ε dans $X^{(N)}$ n'est pas connexe.

Dendricité et isomorphisme

Proposition

Soit $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$.

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ *pour un* $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ *bien choisi si* $w \neq \varepsilon$ *;*
- *si* $w = \varepsilon$*, alors* $\mathcal{E}_{X(N)}(w) \cong \sqcup_{v \in \mathcal{L}_{N-1}(X)} \mathcal{E}_X(v)$*.*

Si $N \geq 2$, alors le graphe d'extension de ε dans $X^{(N)}$ n'est pas connexe.

Corollaire

La famille des sous-shifts dendriques n'est pas stable par isomorphisme.

Ultime dendricité

Définition (Dolce, Perrin)

Un sous-shift X est *ultimement dendrique* s'il existe N tel que tous les mots de longueur au moins N dans $\mathcal{L}(X)$ sont dendriques. Le minimal tel N est appelé *seuil*.

Ultime dendricité

Définition (Dolce, Perrin)

Un sous-shift X est *ultimement dendrique* s'il existe N tel que tous les mots de longueur au moins N dans $\mathcal{L}(X)$ sont dendriques. Le minimal tel N est appelé *seuil*.

Proposition

- *Tout sous-shift dendrique est ultimement dendrique.*
- *Tout sous-shift périodique est ultimement dendrique.*
- *Tout sous-shift quasi-Sturmien est ultimement dendrique.*
- *Tout sous-shift* 1*-équilibré est ultimement dendrique [Dolce, Dvořáková, Pelantová].*

Ultime dendricité et compagnie

Proposition (Dolce & Perrin, G.)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. X *est ultimement ordinaire à droite de seuil* K *;*
2. X *est ultimement dendrique de seuil* L *;*
3. X *est ultimement neutre de seuil* M *;*
4. X *est ultimement acyclique de seuil* M' *;*
5. X *est ultimement faible ou neutre de seuil* N*.*

De plus, $K \geq L \geq M, M' \geq N$*.*

Ultime dendricité et compagnie

Proposition (Dolce & Perrin, G.)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *X est ultimement ordinaire à droite de seuil K ;*
   ordinaire à droite :
   $\exists a$ *tq.* $EG_X(wa) = EG_X(w)$ *et* $\forall b \neq a, \# EG_X(wb) \leq 1$
2. *X est ultimement dendrique de seuil L ;*
3. *X est ultimement neutre de seuil M ;*
4. *X est ultimement acyclique de seuil M' ;*
   acyclique : $\mathcal{E}_X(w)$ *est acyclique*
5. *X est ultimement faible ou neutre de seuil N.*
   faible ou neutre : $\# E_X(w) \leq \# EG_X(w) + \# ED_X(w) - 1$

De plus, $K \geq L \geq M, M' \geq N$.

Ultime dendricité et compagnie (2)

Proposition (G.)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *X est ultimement dendrique de seuil L ;*
2. *X est ultimement connexe de seuil M et $p_X(n) \in O(n)$;*
3. *X est ultimement fort ou neutre de seuil N et $p_X(n) \in O(n)$.*

De plus, $L \geq M \geq N$.

Ultime dendricité et compagnie (2)

Proposition (G.)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. X *est ultimement dendrique de seuil* L *;*
2. X *est ultimement connexe de seuil* M *et* $p_X(n) \in O(n)$ *;*
   connexe : $\mathcal{E}_X(w)$ *est connexe*
3. X *est ultimement fort ou neutre de seuil* N *et* $p_X(n) \in O(n)$.
   fort ou neutre : $\# E_X(w) \geq \# EG_X(w) + \# ED_X(w) - 1$

De plus, $L \geq M \geq N$.

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on perd

Le sous-shift X engendré par

$$00110022001100200110022001100011\cdots$$

est ultimement dendrique de seuil 2.

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on perd

Le sous-shift X engendré par

$$0011002200110020011002200110 0011 \cdots$$

est ultimement dendrique de seuil 2.
On a

$$R_X(02) = \{0200110, 02200110, 022001100110, 0220011000110\}$$

donc

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on perd

Le sous-shift X engendré par

$$0011002200110020011002200110 0011 \cdots$$

est ultimement dendrique de seuil 2.
On a

$$R_X(02) = \{0200110, 02200110, 022001100110, 0220011000110\}$$

donc

- $\# R_X(02) \neq 3$,

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on perd

Le sous-shift X engendré par

$$0011002200110020011002200110011\cdots$$

est ultimement dendrique de seuil 2.
On a

$$R_X(02) = \{0200110, 02200110, 022001100110, 0220011000110\}$$

donc

- $\# R_X(02) \neq 3$,
- $\langle R_X(02) \rangle = \langle 0, 11, 2 \rangle$ donc $R_X(02)$ n'engendre pas le groupe libre sur $\{0, 1, 2\}$,

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on perd

Le sous-shift X engendré par

$$0011002200110020011002200110001 1\cdots$$

est ultimement dendrique de seuil 2.
On a

$$R_X(02) = \{0200110, 02200110, 022001100110, 0220011000110\}$$

donc

- $\# R_X(02) \neq 3$,
- $\langle R_X(02) \rangle = \langle 0, 11, 2 \rangle$ donc $R_X(02)$ n'engendre pas le groupe libre sur $\{0, 1, 2\}$,
- $R_X(02)$ n'est pas une base du sous-groupe qu'il engendre.

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on garde

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est minimal et ultimement neutre de seuil N, alors $\# R_X(w) = p_X(N+1) - p_X(N) + 1$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins N.

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on garde

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est minimal et ultimement neutre de seuil N, alors $\# R_X(w) = p_X(N+1) - p_X(N) + 1$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins N.

Proposition (G., Goulet-Ouellet, Leroy, Stas)

Si X est minimal et ultimement dendrique de seuil N, alors les sous-groupes $\langle R_X(w) \rangle$ sont conjugués pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins N.

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on garde

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est minimal et ultimement neutre de seuil N, alors $\# R_X(w) = p_X(N+1) - p_X(N) + 1$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins N.

Proposition (G., Goulet-Ouellet, Leroy, Stas)

Si X est minimal et ultimement dendrique de seuil N, alors les sous-groupes $\langle R_X(w) \rangle$ sont conjugués pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins N.

Corollaire (G., Goulet-Ouellet, Leroy, Stas)

Si X est minimal, ultimement dendrique et k-automatique, alors X est périodique.

Ultime dendricité et stabilité : dérivation et décodage bifixe

Théorème (G., Leroy)

Tout dérivé d'un sous-shift ultimement dendrique minimal est ultimement dendrique minimal.

Ultime dendricité et stabilité : dérivation et décodage bifixe

Théorème (G., Leroy)

Tout dérivé d'un sous-shift ultimement dendrique minimal est ultimement dendrique minimal.

Plus précisément, si X est minimal et ultimement dendrique de seuil N, alors pour tout $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$, $D_w(X)$ est ultimement dendrique de seuil au plus $\max\{0, N - |w|\}$.

Ultime dendricité et stabilité : dérivation et décodage bifixe

Théorème (G., Leroy)

Tout dérivé d'un sous-shift ultimement dendrique minimal est ultimement dendrique minimal.

Plus précisément, si X est minimal et ultimement dendrique de seuil N, alors pour tout $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$, $D_w(X)$ est ultimement dendrique de seuil au plus $\max\{0, N - |w|\}$.

Théorème (Dolce, Perrin)

Tout décodage bifixe maximal d'un sous-shift ultimement dendrique minimal est ultimement dendrique.

Ultime dendricité et stabilité : isomorphisme

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est ultimement dendrique de seuil N, alors pour tout $n \geq 2$, $X^{(n)}$ est ultimement dendrique de seuil $\max\{1, N-n+1\}$.

Ultime dendricité et stabilité : isomorphisme

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est ultimement dendrique de seuil N, alors pour tout $n \geq 2$, $X^{(n)}$ est ultimement dendrique de seuil $\max\{1, N-n+1\}$.

Proposition (Dolce, Perrin)

Soit X un sous-shift et α un codage injectif sur X.
Si X est ultimement dendrique, alors $\alpha(X)$ est ultimement dendrique.

Ultime dendricité et stabilité : isomorphisme

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est ultimement dendrique de seuil N, alors pour tout $n \geq 2$, $X^{(n)}$ est ultimement dendrique de seuil $\max\{1, N - n + 1\}$.

Proposition (Dolce, Perrin)

Soit X un sous-shift et α un codage injectif sur X.
Si X est ultimement dendrique, alors $\alpha(X)$ est ultimement dendrique.

Théorème (Dolce, Perrin)

La famille des sous-shifts ultimement dendriques est stable par isomorphisme.

Ultime dendricité et stabilité : isomorphisme

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est ultimement dendrique de seuil N, alors pour tout $n \geq 2$, $X^{(n)}$ est ultimement dendrique de seuil $\max\{1, N - n + 1\}$.

Proposition (Dolce, Perrin)

Soit X un sous-shift et α un codage injectif sur X.
Alors X est ultimement dendrique si et seulement si $\alpha(X)$ est ultimement dendrique.

Théorème (Dolce, Perrin)

La famille des sous-shifts ultimement dendriques est stable par isomorphisme.

Ultime dendricité et stabilité : morphismes reconnaissables

Tout morphisme se décompose de la façon suivante :

$$\sigma = \begin{cases} a_i \mapsto \sigma(a)_i \\ b_j \mapsto \sigma(b)_j \\ \dots \end{cases} \circ \begin{cases} a \mapsto a_1 a_2 \cdots a_{|\sigma(a)|} \\ b \mapsto b_1 b_2 \cdots b_{|\sigma(b)|} \\ \dots \end{cases}$$

Ultime dendricité et stabilité : morphismes reconnaissables

Tout morphisme se décompose de la façon suivante :

$$\sigma = \begin{cases} a_i \mapsto \sigma(a)_i \\ b_j \mapsto \sigma(b)_j \\ \dots \end{cases} \circ \begin{cases} a \mapsto a_1 a_2 \cdots a_{|\sigma(a)|} \\ b \mapsto b_1 b_2 \cdots b_{|\sigma(b)|} \\ \dots \end{cases}$$

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soit $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^*$ un morphisme tel que chaque lettre de $\mathcal{B}$ apparaît exactement une fois dans $\tau(\mathcal{A})$. Alors X est ultimement dendrique si et seulement si $\tau(X)$ est ultimement dendrique.

Ultime dendricité et stabilité : morphismes reconnaissables

Tout morphisme se décompose de la façon suivante :

$$\sigma = \begin{cases} a_i \mapsto \sigma(a)_i \\ b_j \mapsto \sigma(b)_j \\ \dots \end{cases} \circ \begin{cases} a \mapsto a_1 a_2 \cdots a_{|\sigma(a)|} \\ b \mapsto b_1 b_2 \cdots b_{|\sigma(b)|} \\ \dots \end{cases}$$

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soit $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^*$ un morphisme tel que chaque lettre de $\mathcal{B}$ apparaît exactement une fois dans $\tau(\mathcal{A})$. Alors X est ultimement dendrique si et seulement si $\tau(X)$ est ultimement dendrique.

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soit σ un morphisme reconnaissable sur X. Alors X est ultimement dendrique si et seulement si $\sigma(X)$ est ultimement dendrique.

Ultime dendricité et (in)stabilité : factorisation et morphismes

Proposition

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- *La famille des sous-shifts ultimement dendriques est stable pour l'application de morphismes.*
- *La famille des sous-shifts ultimement dendriques est stable pour l'application de codages.*
- *La famille des sous-shifts ultimement dendriques est stable pour la factorisation topologique.*

Ultime dendricité et (in)stabilité : factorisation et morphismes (2)

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soient X un sous-shift ultimement dendrique et σ un morphisme. Alors $\sigma(X)$ est ultimement dendrique si et seulement si $\sigma(X)$ est ultimement connexe.

Ultime dendricité et (in)stabilité : factorisation et morphismes (2)

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soient X un sous-shift ultimement dendrique et σ un morphisme. Alors $\sigma(X)$ est ultimement dendrique si et seulement si $\sigma(X)$ est ultimement connexe.

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soient X un sous-shift ultimement dendrique et α un codage. Il existe N tel que, pour tout $v \in \mathcal{L}(\alpha(X))$ de longueur au moins N, si v n'est pas connexe, alors $\alpha^{-1}(v)$ contient uniquement des mots qui ont une unique bi-extension dans X.

Questions ouvertes

- La notion d'ultime dendricité est-elle stable pour l'application de morphisme/la factorisation topologique ?
- Peut-on être plus précis sur les propriétés des mots de retour dans un sous-shift ultimement dendrique ?
- Les sous-shifts dendriques sont-ils les seuls pour lesquels les mots de retour forment une base du groupe libre ?
- Que peut-on dire des classes d'isomorphie des sous-shifts ultimement dendriques ?

Questions ouvertes

- La notion d'ultime dendricité est-elle stable pour l'application de morphisme/la factorisation topologique ?
- Peut-on être plus précis sur les propriétés des mots de retour dans un sous-shift ultimement dendrique ?
- Les sous-shifts dendriques sont-ils les seuls pour lesquels les mots de retour forment une base du groupe libre ?
- Que peut-on dire des classes d'isomorphie des sous-shifts ultimement dendriques ?

Merci pour votre écoute !