# Des sous-shifts Sturmiens aux sous-shifts dendriques

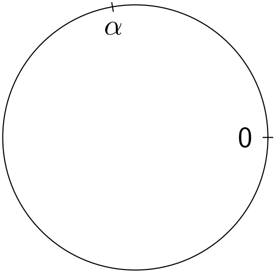
France Gheeraert

2 décembre 2024

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

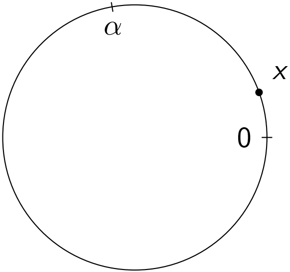
# Rotations

A toute rotation sur le tore...



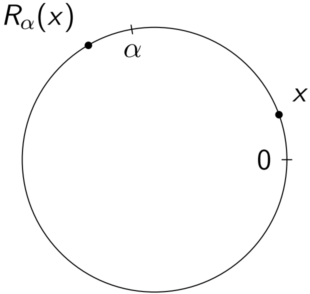
# Rotations

A toute rotation sur le tore...



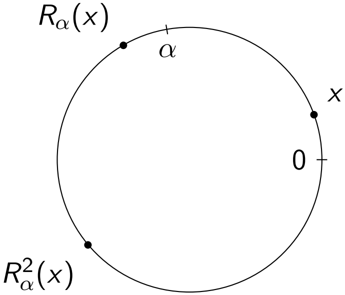
# Rotations

A toute rotation sur le tore...



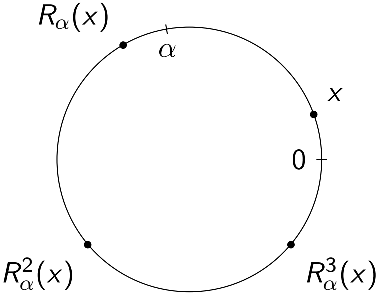
# Rotations

A toute rotation sur le tore...



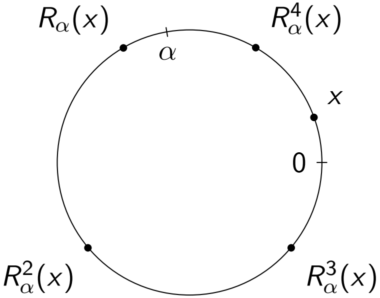
# Rotations

A toute rotation sur le tore...



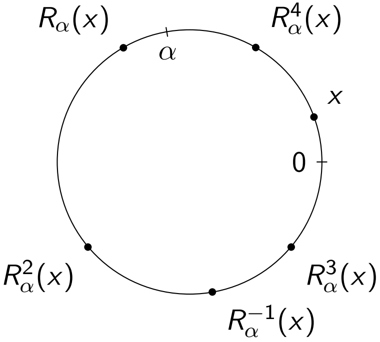
# Rotations

A toute rotation sur le tore...



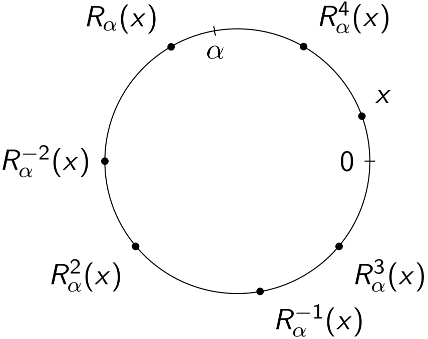
# Rotations

A toute rotation sur le tore...



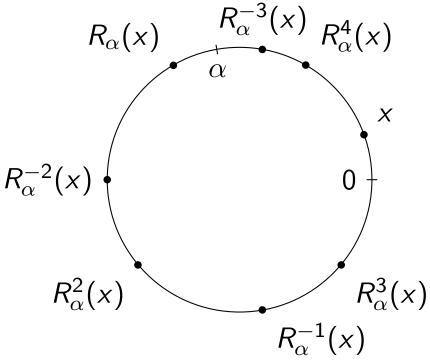
# Rotations

A toute rotation sur le tore...



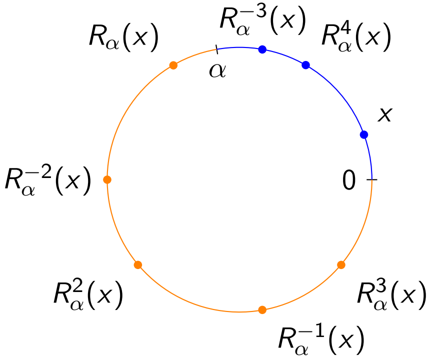
# Rotations

A toute rotation sur le tore...



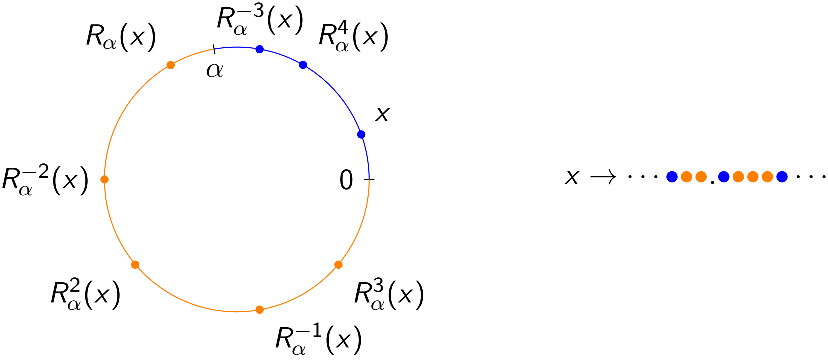
# Rotations

A toute rotation sur le tore...



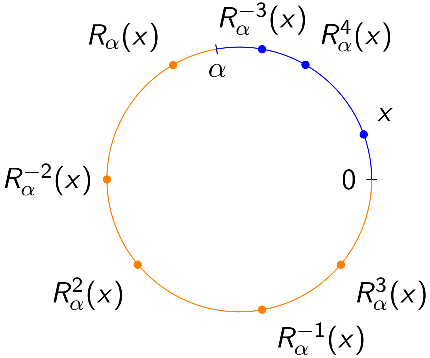
# Rotations

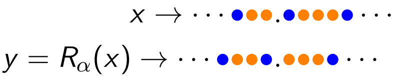
A toute rotation sur le tore... correspond un codage



# Rotations

A toute rotation sur le tore... correspond un codage



# Sous-shifts

Soit $A$ un ensemble fini.

**Définition**

Un *sous-shift* est un SDT $(X, S)$ où

- $X$ est un sous-ensemble fermé de $A^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie produit,
- la dynamique est le *décalage* $S : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$,
- $X$ est stable pour le décalage.

# Sous-shifts

Soit $A$ un ensemble fini.

**Définition**

Un *sous-shift* est un SDT $(X, S)$ où

- $X$ est un sous-ensemble fermé de $A^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie produit,
- la dynamique est le *décalage* $S : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$,
- $X$ est stable pour le décalage.

Exemples :

- $X = A^{\mathbb{Z}}$
- $X = \{\cdots 000.000 \cdots\}$
- $X = \{S^i(\cdots 000.1000 \cdots) : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\cdots 000.000 \cdots\}$

# Sous-shifts Sturmiens

**Définition**

Un sous-shift est *Sturmien* si c'est le codage d'une rotation d'angle irrationnel.

# Sous-shifts Sturmiens

**Définition**

Un sous-shift est *Sturmien* si c'est le codage d'une rotation d'angle irrationnel.

Autres façons de voir des Sturmiens :

- approximation discrète des droites de pente irrationnelle
- lien avec le développement en fraction continue des irrationnels

# Langages

**Définition**

Le *langage* de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$\mathcal{L}(x) = \{w : \exists\ i \leq j \text{ tq. } w = x_i \cdots x_j\}.$$

Le *langage* d'un sous-shift $(X, S)$ est $\mathcal{L}(X) = \cup_{x \in X} \mathcal{L}(x)$.

# Langages

**Définition**

Le *langage* de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$\mathcal{L}(x) = \{w : \exists\ i \leq j \text{ tq. } w = x_i \cdots x_j\}.$$

Le *langage* d'un sous-shift $(X, S)$ est $\mathcal{L}(X) = \cup_{x \in X} \mathcal{L}(x)$.

Exemple : Si

$$X = \{S^i(\cdots 000.1000 \cdots) : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\cdots 000.000 \cdots\},$$

alors $\mathcal{L}(X) = \{w \in \{0,1\}^* \text{ contenant au plus un } 1\}$.

# Langages

**Définition**

Le *langage* de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$\mathcal{L}(x) = \{w : \exists\ i \leq j \text{ tq. } w = x_i \cdots x_j\}.$$

Le *langage* d'un sous-shift $(X, S)$ est $\mathcal{L}(X) = \cup_{x \in X} \mathcal{L}(x)$.

Exemple : Si

$$X = \{S^i(\cdots 000.1000 \cdots) : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\cdots 000.000 \cdots\},$$

alors $\mathcal{L}(X) = \{w \in \{0,1\}^* \text{ contenant au plus un } 1\}$.

Si $(X, S)$ est minimal, alors $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(x)$ pour tout $x \in X$.

# Complexité

**Définition**

La *complexité* de $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

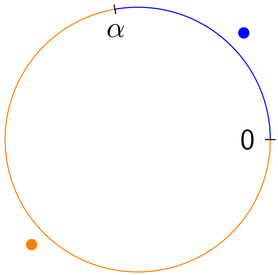
$$p_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \mapsto \#(\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{A}^n).$$

**Théorème (Morse, Hedlund)**

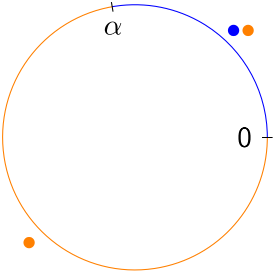
*Soit $(X, S)$ un sous-shift minimal. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *les éléments de $X$ sont périodiques ;*
2. *il existe $C$ tel que $p_X \leq C$ ;*
3. *il existe $n$ tel que $p_X(n) \leq n$.*

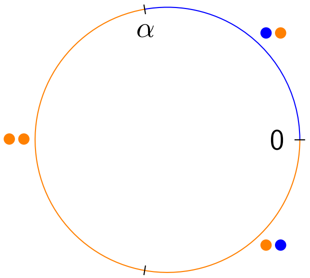
# Complexité des Sturmiens



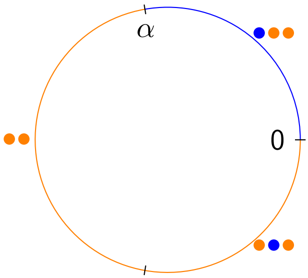
# Complexité des Sturmiens



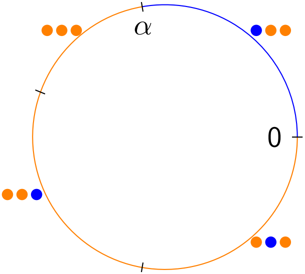
# Complexité des Sturmiens



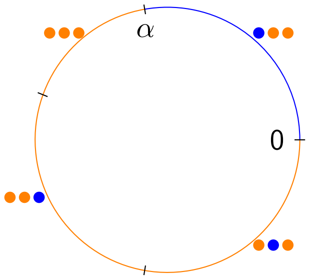
# Complexité des Sturmiens



# Complexité des Sturmiens



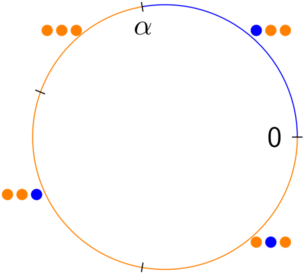
# Complexité des Sturmiens




**Proposition**

*Un sous-shift est Sturmien si et seulement si il est minimal et $p_X(n) = n + 1$ pour tout $n$.*

# Complexité des Sturmiens




**Proposition**

*Un sous-shift est Sturmien si et seulement si il est minimal et $p_X(n) = n + 1$ pour tout $n$.*

Les Sturmiens sont les sous-shifts intéressants les plus simples.

# Généralisations

Les sous-shift Sturmiens sont :

- des codages de rotations irrationnelles
- de complexité $n+1$
- binaires équilibrés apériodiques
- binaires avec exactement un facteur spécial à droite et un facteur spécial à gauche de chaque longueur

# Généralisations

Les sous-shift Sturmiens sont :

- des codages de rotations irrationnelles
  $\rightarrow$ codages d'échanges d'intervalles réguliers
- de complexité $n+1$
  $\rightarrow$ sous-shifts quasi-Sturmiens avec complexité $n+k$
- binaires équilibrés apériodiques
  $\rightarrow$ sous-shifts équilibrés
- binaires avec exactement un facteur spécial à droite et un facteur spécial à gauche de chaque longueur
  $\rightarrow$ sous-shifts épisturmiens stricts

# Graphes d'extensions

$$\cdots 1001001100100100110110 0\cdots$$

$$\mathcal{E}_X(10)$$

# Graphes d'extensions

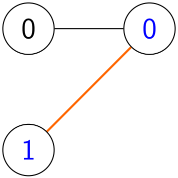
$$\cdots 10010011001001001101100 \cdots$$

$$\mathcal{E}_X(10)$$

# Graphes d'extensions

$$\cdots 100100\color{blue}{1}\color{orange}{10}\color{blue}{0}\color{black}{1001001101100} \cdots$$

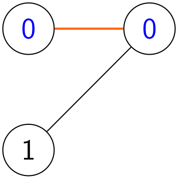
$\mathcal{E}_X(10)$



# Graphes d'extensions

$$\cdots 100100110\,010\,01001101100 \cdots$$

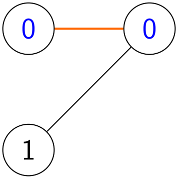
$\mathcal{E}_X(10)$



# Graphes d'extensions

$$\cdots 10010011001001001101100 \cdots$$

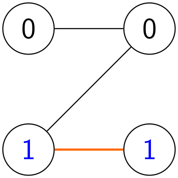
$\mathcal{E}_X(10)$



# Graphes d'extensions

$$\cdots 1001001100100100\textcolor{blue}{1}\textcolor{orange}{10}\textcolor{blue}{1}100\cdots$$

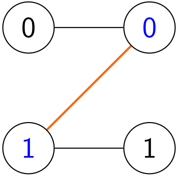
$\mathcal{E}_X(10)$



# Graphes d'extensions

$$\cdots 1001001100100100110{\color{blue}1}{\color{orange}10}{\color{blue}0}\cdots$$

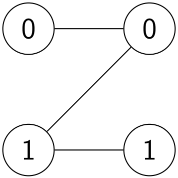
$\mathcal{E}_X(10)$



# Graphes d'extensions

$$\cdots 10010011001001001101100 \cdots$$

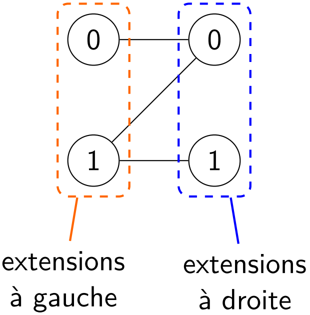
$$\mathcal{E}_X(10)$$



# Graphes d'extensions

$$\cdots 1001001100100100110110 0\cdots$$

$\mathcal{E}_X(10)$



# Dendricité

**Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)**

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

# Dendricité

**Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)**

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Un sous-shift $X$ est *dendrique* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont dendriques.

# Dendricité

**Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)**

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Un sous-shift $X$ est *dendrique* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont dendriques.

**Proposition**

- *Tout sous-shift Sturmien est dendrique.*

# Dendricité

**Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)**

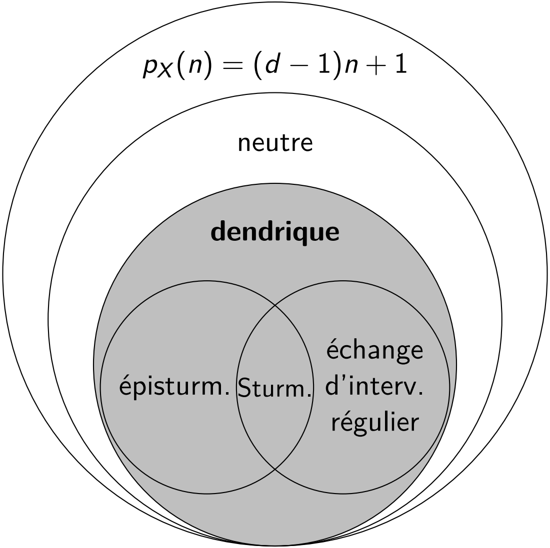
Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Un sous-shift $X$ est *dendrique* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont dendriques.

**Proposition**

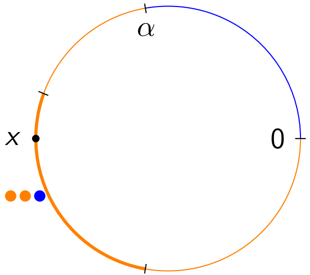
- *Tout sous-shift Sturmien est dendrique.*
- *Tout codage d'échange d'intervalles régulier est dendrique.*
- *Tout sous-shift épisturmien strict est dendrique.*

# Hiérarchie

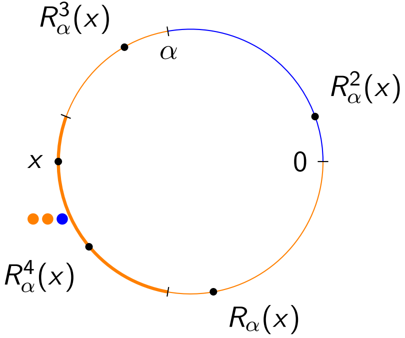


$p_X(n) = (d-1)n + 1$
neutre
**dendrique**
épisturm.
Sturm.
échange
d'interv.
régulier

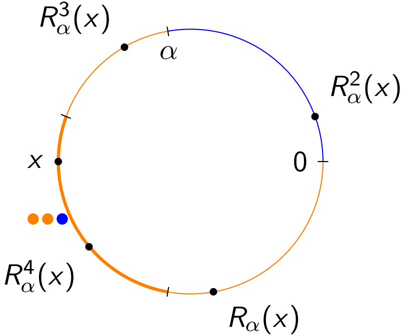
# Mots de retour



# Mots de retour

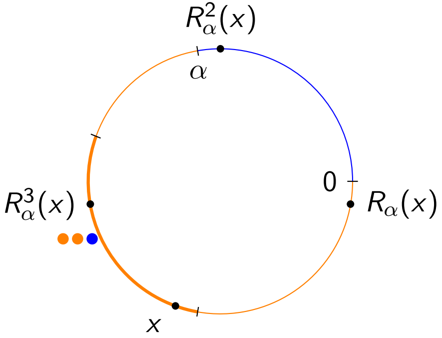


# Mots de retour




mots de retour pour :

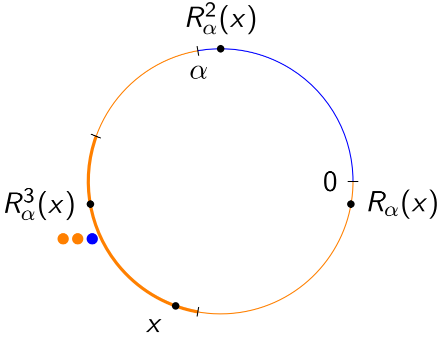
# Mots de retour




mots de retour pour ●●● :

●●●●, ●●●

# Mots de retour




mots de retour pour ●●● :

●●●●, ●●●

**Définition**

Un *mot de retour* pour $w$ est un mot $u$ tel que

$$uw \in \mathcal{L}(X) \cap w\mathcal{A}^* \setminus \mathcal{A}^+ w \mathcal{A}^+.$$

L'ensemble des mots de retour pour $w$ est noté $\mathcal{R}_X(w)$.

# Dendricité et mots de retour

**Théorème (Vuillon)**

*Un sous-shift minimal est Sturmien si et seulement si, pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$, $\#\mathcal{R}_X(w) = 2$.*

# Dendricité et mots de retour

**Théorème (Vuillon)**

*Un sous-shift minimal est Sturmien si et seulement si, pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$, $\# \mathcal{R}_X(w) = 2$.*

**Théorème (Balková, Pelantová, Steiner)**

*Soit $(X, S)$ un sous-shift minimal sur $\mathcal{A}$. Si $(X, S)$ est neutre, alors $\# \mathcal{R}_X(w) = \# \mathcal{A}$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$.*
*C'est une caractérisation pour $\# \mathcal{A} = 3$.*

# Dendricité et mots de retour

**Théorème (Vuillon)**

*Un sous-shift minimal est Sturmien si et seulement si, pour tout* $w \in \mathcal{L}(X)$, $\#\mathcal{R}_X(w) = 2$.

**Théorème (Balková, Pelantová, Steiner)**

*Soit* $(X, S)$ *un sous-shift minimal sur* $\mathcal{A}$. *Si* $(X, S)$ *est neutre, alors* $\#\mathcal{R}_X(w) = \#\mathcal{A}$ *pour tout* $w \in \mathcal{L}(X)$.
*C'est une caractérisation pour* $\#\mathcal{A} = 3$.

**Théorème (Berthé *et al.* & G., Goulet-Ouellet, Leroy, Stas)**

*Un sous-shift minimal sur* $\mathcal{A}$ *est dendrique si et seulement si* $\mathcal{R}_X(w)$ *est une base du groupe libre* $F_{\mathcal{A}}$ *pour tout* $w \in \mathcal{L}(X)$.

# Dendricité et dérivation

$$\cdots 0010001000100100010010 \cdots$$

# Dendricité et dérivation

$$\cdots 0010\ 0010\ 001\ 0010\ 001\ 0010 \cdots$$

# Dendricité et dérivation

$$\cdots 0010\ 0010\ 001\quad 0010\ 001\quad 0010 \cdots$$

$$\cdots \quad a \quad\quad a \quad\quad b \quad\quad a \quad\quad b \quad\quad a \quad \cdots$$

# Dendricité et dérivation

$$\cdots 0010\ 0010\ 001\quad 0010\ 001\quad 0010 \cdots$$

$$\cdots \quad a \quad a \quad b \quad a \quad b \quad a \quad \cdots$$

**Définition**

Soient $(X, S)$ minimal, $w \in \mathcal{L}(X)$ et $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{R}_X(w)$ une bijection. Le *dérivé de $X$ par rapport à $w$* est

$$D_w(X) = \{y \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} : \cdots \sigma(y_{-1}).\sigma(y_0)\sigma(y_1) \cdots \in X\}.$$

# Dendricité et dérivation

$$\cdots 0010\ 0010\ 001 \quad 0010\ 001 \quad 0010 \cdots$$

$$\cdots \quad a \quad a \quad b \quad a \quad b \quad a \quad \cdots$$

**Définition**

Soient $(X, S)$ minimal, $w \in \mathcal{L}(X)$ et $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{R}_X(w)$ une bijection. Le *dérivé de $X$ par rapport à $w$* est

$$D_w(X) = \{y \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} : \cdots \sigma(y_{-1}).\sigma(y_0)\sigma(y_1)\cdots \in X\}.$$

**Théorème (Berthé *et al.*)**

*Tout dérivé d'un sous-shift dendrique minimal est dendrique minimal.*

# Isomorphisme

**Définition**

Deux sous-shifts $(X, S)$ et $(Y, S)$ sont *isomorphes* (ou *conjugués*) s'il existe une bijection $\varphi : X \to Y$ qui soit continue et respecte le décalage, i.e., $S(\varphi(x)) = \varphi(S(x))$.

# Isomorphisme

## Définition

Deux sous-shifts $(X, S)$ et $(Y, S)$ sont *isomorphes* (ou *conjugués*) s'il existe une bijection $\varphi : X \to Y$ qui soit continue et respecte le décalage, i.e., $S(\varphi(x)) = \varphi(S(x))$.

## Théorème (Curtis, Hedlund, Lyndon)

*L'application $\varphi : X \to Y$ est continue et respecte le décalage si et seulement s'il existe $N \geq 1$, $k < N$ et un codage $\theta$ tels que, pour tout $x \in X$,*

$$\varphi(x) = S^{-k}\theta(x^{(N)})$$

*où $x^{(N)} = (x_n \cdots x_{n+N-1})_{n\in\mathbb{Z}}$.*

# Isomorphisme

**Définition**

Deux sous-shifts $(X, S)$ et $(Y, S)$ sont *isomorphes* (ou *conjugués*) s'il existe une bijection $\varphi : X \to Y$ qui soit continue et respecte le décalage, i.e., $S(\varphi(x)) = \varphi(S(x))$.

**Théorème (Curtis, Hedlund, Lyndon)**

*L'application $\varphi : X \to Y$ est continue et respecte le décalage si et seulement s'il existe $N \geq 1$, $k < N$ et un codage $\theta$ tels que, pour tout $x \in X$,*

$$\varphi(x) = S^{-k}\theta(x^{(N)})$$

*où $x^{(N)} = (x_n \cdots x_{n+N-1})_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Autrement dit, tout isomorphisme peut-être décomposé en

1. l'isomorphisme naturel entre $X$ et un certain
$$X^{(N)} := \{x^{(N)} : x \in X\},$$
2. un codage entre $X^{(N)}$ et $Y$, injectif sur $X^{(N)}$.

# Dendricité et isomorphisme

**Proposition**

*Soit* $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$.

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ *pour un* $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ *bien choisi*

# Dendricité et isomorphisme

**Proposition**

*Soit* $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$.

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ *pour un* $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ *bien choisi si* $w \neq \varepsilon$
- *si* $w = \varepsilon$, *alors* $\mathcal{E}_{X(N)}(w) \cong \sqcup_{v \in \mathcal{L}_{N-1}(X)} \mathcal{E}_X(v)$.

# Dendricité et isomorphisme

**Proposition**

*Soit* $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$.

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ *pour un* $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ *bien choisi si* $w \neq \varepsilon$
- *si* $w = \varepsilon$, *alors* $\mathcal{E}_{X(N)}(w) \cong \sqcup_{v \in \mathcal{L}_{N-1}(X)} \mathcal{E}_X(v)$.

Si $N \geq 2$, alors le graphe d'extension de $\varepsilon$ dans $X^{(N)}$ n'est pas connexe.

# Dendricité et isomorphisme

**Proposition**

*Soit* $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$*.*

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ *pour un* $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ *bien choisi si* $w \neq \varepsilon$
- *si* $w = \varepsilon$*, alors* $\mathcal{E}_{X(N)}(w) \cong \sqcup_{v \in \mathcal{L}_{N-1}(X)} \mathcal{E}_X(v)$*.*

Si $N \geq 2$, alors le graphe d'extension de $\varepsilon$ dans $X^{(N)}$ n'est pas connexe.

**Corollaire**

*La dendricité n'est pas stable par isomorphisme.*

# Ultime dendricité

**Définition (Dolce, Perrin)**

Un sous-shift $(X, S)$ est *ultimement dendrique* s'il existe $N$ tel que tous les mots de longueur au moins $N$ dans $\mathcal{L}(X)$ sont dendriques. Le $N$ minimal est appelé *seuil*.

# Ultime dendricité

**Définition (Dolce, Perrin)**

Un sous-shift $(X, S)$ est *ultimement dendrique* s'il existe $N$ tel que tous les mots de longueur au moins $N$ dans $\mathcal{L}(X)$ sont dendriques. Le $N$ minimal est appelé *seuil*.

**Proposition**

- *Tout sous-shift dendrique est ultimement dendrique.*
- *Tout sous-shift périodique est ultimement dendrique.*
- *Tout sous-shift quasi-Sturmien est ultimement dendrique.*
- *Tout sous-shift* 1*-équilibré est ultimement dendrique [Dolce, Dvořáková, Pelantová].*

# Ultime dendricité et isomorphisme

**Proposition (Dolce, Perrin)**

*Si $(X, S)$ est ultimement dendrique de seuil $M$, alors pour tout $N \geq 2$, $(X^{(N)}, S)$ est ultimement dendrique de seuil $\max\{1, M - N + 1\}$.*

# Ultime dendricité et isomorphisme

**Proposition (Dolce, Perrin)**

*Si* $(X, S)$ *est ultimement dendrique de seuil* $M$*, alors pour tout* $N \geq 2$*,* $(X^{(N)}, S)$ *est ultimement dendrique de seuil* $\max\{1, M - N + 1\}$*.*

**Proposition (Dolce, Perrin)**

*Soit* $(X, S)$ *un sous-shift et* $\alpha$ *un codage injectif sur* $X$*. Si* $(X, S)$ *est ultimement dendrique, alors* $(\alpha(X), S)$ *est ultimement dendrique.*

# Ultime dendricité et isomorphisme

**Proposition (Dolce, Perrin)**

*Si* $(X, S)$ *est ultimement dendrique de seuil* $M$*, alors pour tout* $N \geq 2$*,* $(X^{(N)}, S)$ *est ultimement dendrique de seuil* $\max\{1, M - N + 1\}$*.*

**Proposition (Dolce, Perrin)**

*Soit* $(X, S)$ *un sous-shift et* $\alpha$ *un codage injectif sur* $X$*. Si* $(X, S)$ *est ultimement dendrique, alors* $(\alpha(X), S)$ *est ultimement dendrique.*

**Théorème (Dolce, Perrin)**

*L'ultime dendricité est stable par isomorphisme.*

# Ultime dendricité & co

**Proposition (Dolce, Perrin ; G.)**

*Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $(X, S)$ *est ultimement dendrique ;*
2. $(X, S)$ *est ultimement neutre ;*

# Ultime dendricité & co

**Proposition (Dolce, Perrin ; G.)**

*Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $(X, S)$ *est ultimement dendrique ;*
2. $(X, S)$ *est ultimement neutre ;*
3. $(X, S)$ *est ultimement ordinaire ;*
4. $(X, S)$ *est ultimement acyclique ;*
5. $(X, S)$ *est ultimement faible ou neutre ;*

# Ultime dendricité & co

**Proposition (Dolce, Perrin ; G.)**

*Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $(X, S)$ *est ultimement dendrique ;*
2. $(X, S)$ *est ultimement neutre ;*
3. $(X, S)$ *est ultimement ordinaire ;*
4. $(X, S)$ *est ultimement acyclique ;*
5. $(X, S)$ *est ultimement faible ou neutre ;*
6. $(X, S)$ *est ultimement connexe et* $p_X(n) \in O(n)$ *;*
7. $(X, S)$ *est ultimement fort ou neutre et* $p_X(n) \in O(n)$*.*

# Ultime dendricité et mots de retour

Le sous-shift $(X, S)$ engendré par

$$\cdots 0011002200110020011002200110001 1\cdots$$

est ultimement dendrique de seuil 2.

# Ultime dendricité et mots de retour

Le sous-shift $(X, S)$ engendré par

$$\cdots 0011002200110020011002200110001\,1 \cdots$$

est ultimement dendrique de seuil 2.
On a

$$\mathcal{R}_X(00) = \{0011, 0022, 002, 0\}$$

donc

# Ultime dendricité et mots de retour

Le sous-shift $(X, S)$ engendré par

$$\cdots 001100220011002001100220011000 11\cdots$$

est ultimement dendrique de seuil 2.
On a

$$\mathcal{R}_X(00) = \{0011, 0022, 002, 0\}$$

donc

- $\#\mathcal{R}_X(00) = 4 \neq 3$,

# Ultime dendricité et mots de retour

Le sous-shift $(X, S)$ engendré par

$$\cdots 0011002200110020011002200110001 1\cdots$$

est ultimement dendrique de seuil 2.
On a

$$\mathcal{R}_X(00) = \{0011, 0022, 002, 0\}$$

donc

- $\# \mathcal{R}_X(00) = 4 \neq 3$,
- $\langle \mathcal{R}_X(00) \rangle = \langle 0, 11, 2 \rangle \neq F_{\{0,1,2\}}$,

# Ultime dendricité et mots de retour

Le sous-shift $(X, S)$ engendré par

$$\cdots 0011002200110020011002200110001 1\cdots$$

est ultimement dendrique de seuil 2.
On a

$$\mathcal{R}_X(00) = \{0011, 0022, 002, 0\}$$

donc

- $\# \mathcal{R}_X(00) = 4 \neq 3$,
- $\langle \mathcal{R}_X(00) \rangle = \langle 0, 11, 2 \rangle \neq F_{\{0,1,2\}}$,
- $\mathcal{R}_X(00)$ n'est pas une base du sous-groupe qu'il engendre.

# Ultime dendricité et mots de retour : tout n'est pas perdu

**Proposition (Dolce, Perrin)**

*Si $(X, S)$ est minimal et ultimement neutre de seuil $N$, alors $\# \mathcal{R}_X(w) = p_X(N+1) - p_X(N) + 1$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins $N$.*

# Ultime dendricité et mots de retour : tout n'est pas perdu

**Proposition (Dolce, Perrin)**

*Si $(X, S)$ est minimal et ultimement neutre de seuil $N$, alors $\# \mathcal{R}_X(w) = p_X(N+1) - p_X(N) + 1$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins $N$.*

**Proposition (G., Goulet-Ouellet, Leroy, Stas)**

*Si $(X, S)$ est minimal et ultimement dendrique de seuil $N$, alors les sous-groupes $\langle \mathcal{R}_X(w) \rangle$ sont conjugués pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins $N$.*

# Ultime dendricité et dérivation

**Théorème (G., Leroy)**

*Si $(X, S)$ est minimal et ultimement dendrique de seuil $N$, alors $(D_w(X), S)$ est ultimement dendrique de seuil $\leq \max\{0, N - |w|\}$.*

**Théorème (G., Leroy)**

*Soit $(X, S)$ un sous-shift minimal. Si $(X, S)$ est ultimement dendrique, alors il a un dérivé dendrique.*

# Ultime dendricité et dérivation

**Théorème (G., Leroy)**

*Si $(X, S)$ est minimal et ultimement dendrique de seuil $N$, alors $(D_w(X), S)$ est ultimement dendrique de seuil $\leq \max\{0, N - |w|\}$.*

$$Y = D_w(X) \iff X = \sigma[Y]$$

où $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{R}_X(w)$ est une bijection appelée *substitution de retour*.

**Proposition (G., Leroy)**

*Si $(X, S)$ est ultimement dendrique et si $\sigma$ est une substitution de retour, alors $(\sigma[X], S)$ est ultimement dendrique.*

**Théorème (G., Leroy)**

*Soit $(X, S)$ un sous-shift minimal. Si $(X, S)$ est ultimement dendrique, alors il a un dérivé dendrique.*

# Ultime dendricité et dérivation

**Théorème (G., Leroy)**

*Si $(X, S)$ est minimal et ultimement dendrique de seuil $N$, alors $(D_w(X), S)$ est ultimement dendrique de seuil $\leq \max\{0, N - |w|\}$.*

$$Y = D_w(X) \iff X = \sigma[Y]$$

où $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{R}_X(w)$ est une bijection appelée *substitution de retour*.

**Proposition (G., Leroy)**

*Si $(X, S)$ est ultimement dendrique et si $\sigma$ est une substitution de retour, alors $(\sigma[X], S)$ est ultimement dendrique.*

**Théorème (G., Leroy)**

*Soit $(X, S)$ un sous-shift minimal. Alors $(X, S)$ est ultimement dendrique si et seulement s'il a un dérivé dendrique.*

# Travaux actuels et futurs

- Peut-on caractériser l'ultime dendricité à l'aide des mots de retour ?
- (Espinoza) L'ultime dendricité est préservée par l'application de codages non-injectif.
- (Damron, Fickenscher) Le nombre de mesures ergodiques d'un ultimement dendrique est borné par $\frac{K+1}{2}$ si $p_X(n) \sim Kn$. Peut-on être plus précis ?

# Travaux actuels et futurs

- Peut-on caractériser l'ultime dendricité à l'aide des mots de retour ?
- (Espinoza) L'ultime dendricité est préservée par l'application de codages non-injectif.
- (Damron, Fickenscher) Le nombre de mesures ergodiques d'un ultimement dendrique est borné par $\frac{K+1}{2}$ si $p_X(n) \sim Kn$. Peut-on être plus précis ?

Merci pour votre écoute !